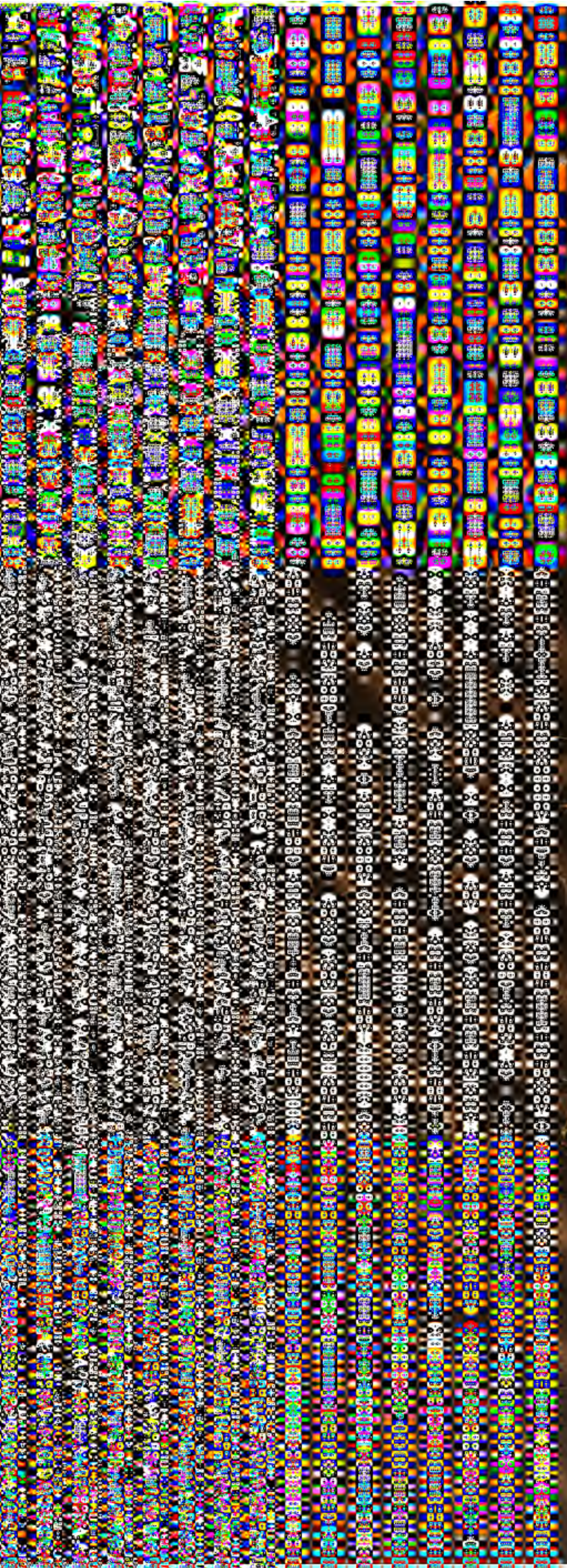
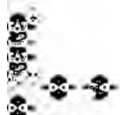
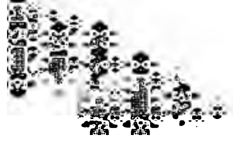












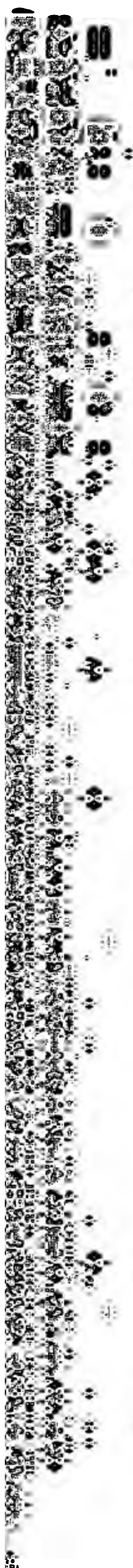
# LEÇONS NOUVELLES

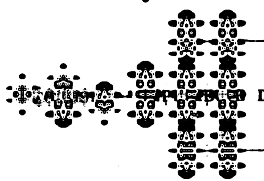
SUR LES

# APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DU

# CALCUL DIFFÉRENTIEL





DESLIS FRÈRES.

# LEÇONS NOUVELLES

SUR LES

# APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DU

# CALCUL DIFFÉRENTIEL

PAR

**W. DE TANNENBERG**

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

---

PARIS,

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

8, Rue de la Sorbonne, 8

1899

1° Supposons, en particulier, que le développement se réduise à :

$$x = x_0 + a(t - t_0), \qquad y = y_0 + b(t - t_0), \qquad z = z_0 + c(t - t_0).$$

Faisons un changement de variable indépendante et posons :

$$t - t_0 = u;$$

les équations précédentes deviennent

$$\text{(D)} \qquad x = x_0 + au \qquad y = y_0 + bu \qquad z = z_0 + cu$$

et définissent, comme on sait, une ligne droite D. Nous aurons très souvent à utiliser la signification géométrique des coefficients; aussi je la rappelle brièvement :

$x_0, y_0, z_0$ sont les coordonnées d'un point P de la droite D ; $a$, $b$, $c$, sont les coordonnées d'un point ($d$) pris sur la parallèle à la droite D menée par l'origine. Ces nombres $a$, $b$, $c$ sont dits les *coefficients de direction* de la droite D.

Choisissons sur D, comme direction positive, la direction de O vers ($d$), et soit M le point de D correspondant à la valeur $u$ de la variable indépendante, on a en grandeur et en signe :

$$u = \frac{\text{PM}}{\text{O}d}.$$

En particulier, si :

$$\text{O}d = 1,$$

on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

et :

$$u = \text{PM}.$$

Dans ce cas, O$d$ est dit le *segment directeur* de la droite D ; $a$, $b$, $c$ sont appelés les *cosinus directeurs* de D ou bien encore ses *paramètres directeurs.*

Une droite étant définie géométriquement, il est clair que ses coefficients de direction ne sont déterminés qu'à un facteur constant près. Pour obtenir un système de coefficients de direction, on prendra les coordonnées d'un point situé sur la parallèle à D, passant par l'origine.

Supposons, par exemple, la droite D définie par deux points $M_1$ $(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2$ $(x_2, y_2, z_2)$, alors un système de coefficients de direction est évidemment donné par les formules :

$$a = x_2 - x_1, \qquad b = y_2 - y_1, \qquad c = z_2 - z_1.$$

Tous les systèmes de coefficients de direction sont donnés par la formule :

$$a = \lambda(x_2 - x_1), \qquad b = \lambda(y_2 - y_1), \qquad c = \lambda(z_2 - z_1).$$

2° Enfin, considérons encore le cas où les équations de Γ se réduisent à :

$$(\Gamma') \qquad \begin{cases} x = x_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2, \\ y = y_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2, \\ z = z_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$x = x_0 + a_1u + a_2u^2, \quad y = y_0 + b_1u + b_2u^2, \quad z = z_0 + c_1u + c_2u^2;$$

dans ce cas, la courbe Γ est une parabole, pourvu toutefois que les déterminants partiels du tableau :

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \end{matrix}$$

ne soient pas tous nuls. Si tous ces déterminants sont nuls, les équations (Γ') définissent une droite. Je laisse au lecteur le soin de démontrer cette proposition fort simple.

§ 2. — *Étant données les équations d'une courbe Γ, reconnaître si elle est plane ou gauche*

Soient :

$$(\Gamma) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

les équations données. Supposons d'abord la courbe Γ plane, alors il existe quatre nombres A, B, C, D, tels que l'on ait identiquement (quel que soit $t$) :

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0;$$

en outre, A, B, C ne sont pas nuls tous trois. De l'identité (1) on tire en différentiant :

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' &= 0, \end{aligned}$$

et par suite :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous allons démontrer que cette condition nécessaire est aussi suffisante. En effet, supposons que la condition (2) soit remplie et en outre que l'un des mineurs de $x'''$, $y'''$, $z'''$ soit différent de zéro, soit par exemple :

$$(3) \qquad x'y'' - y'x'' \neq 0.$$

Alors il existe des fonctions $\lambda$ et $\mu$ de $t$ satisfaisant à :

$$(4) \qquad \lambda x' + \mu y' = z',$$
$$(5) \qquad \lambda x'' + \mu y'' = z'';$$

en vertu de la condition (2), ces fonctions $\lambda$ et $\mu$ satisfont aussi à :

$$(6) \qquad \lambda x''' + \mu y''' = z'''.$$

Différentions les équations (4) et (5), nous obtenons :

$$\lambda' x' + \mu' y' = 0,$$
$$\lambda' x'' + \mu' y'' = 0,$$

et par suite, en vertu de l'hypothèse (3),

$$\lambda' = 0, \qquad \mu' = 0;$$

les fonctions $\lambda$, $\mu$ se réduisent donc à des constantes :

$$\lambda = C^{te}, \qquad \mu = C^{te}.$$

La première des équations (4) montre alors que les fonctions $x$, $y$, $z$, satisfont identiquement à :

$$z = \lambda x + \mu y + \nu,$$

$\nu$ désignant une nouvelle constante. La courbe $\Gamma$ est donc plane.

Supposons maintenant que les trois mineurs de $x'''$, $y'''$, $z'''$ soient nuls :

$$y'z'' - z'y'' = 0, \qquad z'x'' - x'z'' = 0, \qquad x'y'' - y'x'' = 0;$$

alors on voit immédiatement que la ligne $\Gamma$ est droite.

Ainsi, dans tous les cas, la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Γ soit plane est exprimée par la relation (2).

## § 3. — *Tangente*

La tangente au point M est la position limite de la sécante MM′, quand M′ tend vers M.

Soient $t$ et $t'$ les valeurs de la variable indépendante, qui correspondent aux points M $(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$. Nous pouvons prendre comme coefficients de direction de la sécante MM′ les nombres :

$$x' - x, \qquad y' - y, \qquad z' - z,$$

et aussi :

$$\frac{x' - x}{t' - t}, \qquad \frac{y' - y}{t' - t}, \qquad \frac{z' - z}{t' - t}.$$

Les limites de ces rapports sont respectivement :

$$a = \frac{dx}{dt}, \qquad b = \frac{dy}{dt}, \qquad c = \frac{dz}{dt}.$$

Ces trois coefficients déterminent complètement la tangente, pourvu qu'ils ne soient pas nuls tous trois.

Supposons que ces trois nombres soient nuls et soient X, Y, Z les coordonnées d'un point situé dans le voisinage du point M :

$$(1) \qquad \begin{cases} X = x + a_1 (T - t) + a_2 (T - t)^2 + \dots \\ Y = y + b_1 (T - t) + b_2 (T - t)^2 + \dots \\ Z = z + c_1 (T - t) + c_2 (T - t)^2 + \dots \end{cases}$$

Il peut arriver qu'il existe une fonction θ de T, régulière au point M,

$$\theta = \varphi(T) = h_1 (T - t) + h_2 (T - t)^2 + \dots$$

et telle que l'on ait identiquement ($A_i$, $B_i$, $C_i$ désignant des constantes):

$$\begin{aligned} X &= x + A_1\theta + A_2\theta^2 + \dots \\ Y &= y + B_1\theta + B_2\theta^2 + \dots \\ Z &= z + C_1\theta + C_2\theta^2 + \dots \end{aligned}$$

et telle, *en outre*, que $A_1$, $B_1$, $C_1$ ne soient pas nuls tous trois; alors, en vertu de ce qui précède, les quantités $A_1$, $B_1$, $C_1$ représentent les coefficients de direction de la tangente en M. Dans ce cas, le point M est dit

un point *ordinaire*. Tout point non ordinaire de la courbe sera dit un point *singulier*.

*Exemples*. — L'origine est un point ordinaire des courbes

$$(2) \qquad x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3,$$
$$(3) \qquad x = t^2, \qquad y = t^4, \qquad z = t^6,$$

mais un point singulier de la courbe :

$$(4) \qquad x = t^2, \qquad y = t^3, \qquad z = t^4.$$

Il est, en effet, aisé de voir que le changement de variables indiqué :

$$h_1 t + h_2 t^2 + \dots = \theta,$$

est impossible pour les équations (3) ; au contraire, si dans les équations (2) on pose :

$$t^2 = \theta,$$

on tombe sur les équations :

$$x = \theta, \qquad y = \theta^2, \qquad z = \theta^3,$$

qui mettent en évidence la proposition annoncée. On voit que la branche de courbe (2) fait partie de la courbe (1).

Remarque I. — Revenons aux équations (1) de la courbe dans le voisinage du point M et supposons que :

$$a_1 = b_1 = c_1 = 0, \qquad c_2 \neq 0.$$

On peut, dans tous les cas, obtenir la tangente de la manière suivante. Prenons comme coefficients de direction de la sécante :

$$\frac{X - x}{(T - t)^2}, \qquad \frac{Y - y}{(T - t)^2}, \qquad \frac{Z - z}{(T - t)^2}$$

on a :

$$\lim \frac{X - x}{(T - t)^2} = a_2, \qquad \lim \frac{Y - y}{(T - t)^2} = b_2, \qquad \lim \frac{Z - z}{(T - t)^2} = c_2.$$

On peut donc prendre comme coefficients de direction de la tangente en M les nombres $a_2$, $b_2$, $c_2$ qui, par hypothèse, ne sont pas tous nuls.

REMARQUE II. — Supposons la courbe (Γ) :

$$(\Gamma) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

définie par ses équations cartésiennes, c'est-à-dire par les équations :

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0,$$

obtenues en éliminant $t$ entre les équations (Γ). Dans ce cas, on obtient les coefficients de direction $dx$, $dy$, $dz$ de la tangente en M, en appliquant la règle de différentiation des fonctions implicites.

*Exemple.* — Considérons le cercle :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \end{cases}$$

Les différentielles de $x$, $y$, $z$, prises par rapport à la variable $t$, qui fixe la position du point M $(x, y, z)$ sur le cercle, satisfont à :

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$
$$xdz + ydy + zdz = 0,$$

Au point M, les trois expressions :

$$Bz - Cy, \qquad Cx - Az, \qquad Ay - Bx,$$

ne sont pas nulles (si elles l'étaient, le cercle se réduirait à un point de la sphère); donc on peut les prendre pour coefficients de direction de la tangente. Celle-ci a pour équations :

$$X = x + u(Bz - Cy), \quad Y = y + u(Cx - Az), \quad Z = z + u(Ay - Bx).$$

## § 4. — *Plan osculateur*

Soit M un point quelconque de la courbe :

$$(\Gamma) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

et soit MT la tangente en ce point. On appelle plan osculateur en M la position limite du plan passant par MT et par un second point M′ de la courbe, quand le point M′ tend vers le point M. Pour trouver cette limite, formons l'équation du plan MTM′. Désignons par $x'$, $y'$, $z'$ les dérivées de $x$, $y$, $z$, prises par rapport à $t$ et par $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordon-

nées du point M'. Le plan TMM' est alors représenté par :

$$(1) \qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

avec :

$$(2) \quad Ax'+By'+Cz'=0, \; A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0.$$

Mais :

$$x_1 = f(t+\varepsilon) = x + \frac{\varepsilon}{1}x' + \frac{\varepsilon^2}{1.2}x'' + \ldots$$

et $y_1$ et $z_1$ ont des expressions analogues ; donc le système (2) peut prendre la forme :

$$Ax'+By'+Cz'=0,$$
$$Ax'+By'+Cz'+\frac{\varepsilon}{2}(Ax''+By''+Cz'')+\ldots=0,$$

ou encore :

$$Ax'+By'+Cz'=0,$$
$$\frac{1}{2}(Ax''+By''+Cz'')+\frac{\varepsilon}{6}(Ax'''+By'''+Cz''')+\ldots=0.$$

Donc le plan TMM' a une limite bien déterminée, définie par :

$$(3) \quad \begin{cases} A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \\ Ax'+By'+Cz'=0, \qquad Ax''+By''+Cz''=0. \end{cases}$$

pourvu toutefois que les expressions $y'z''-z'y''$, $z'x''-x'z''$, $x'y''-y'x''$ ne soient pas toutes nulles. L'équation du plan osculateur est donc :

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons que les trois binômes $y'z''-z'y''$, $z'x''-x'z''$, $x'y''-y'x''$ ne peuvent être nuls en tout point M de la ligne $\Gamma$, sans quoi celle-ci se réduirait à une ligne droite.

Remarque. — Les équations (3) mettent en évidence la propriété suivante du plan osculateur :

« Le plan osculateur en M peut être considéré comme la position « limite du plan, passant par MT et parallèle à la tangente en M', quand « le point M' tend vers le point M. »

§ 5. — *Position du plan osculateur par rapport à la courbe*

Prenons pour origine un point ordinaire O de la courbe Γ, pour axe des $x$ la tangente au point O, et pour plan des $xy$ le plan osculateur au point O. Les équations de Γ ont la forme :

$$x = a_1 t + a_2 t^2 + \dots, \qquad y = b_1 t + b_2 t^2 + \dots, \qquad z = c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

Comme l'origine est un point ordinaire, nous pouvons supposer que $a_1$, $b_1$, $c_1$ ne sont pas nuls tous trois. D'ailleurs, l'axe des $x$ est tangent à la courbe; donc :

$$b_1 = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad a_1 \neq 0.$$

Exprimons que le plan osculateur à l'origine:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

se confond avec le plan des $xy$, nous obtenons :

$$a_1 c_2 = 0,$$

et comme, par hypothèse :

$$a_1 \neq 0,$$

la condition précédente devient:

$$c_2 = 0.$$

Les équations de Γ deviennent alors:

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} x = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \\ y = \phantom{a_1 t + {}} b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots \\ z = \phantom{a_1 t + b_2 t^2 + {}} c_3 t^3 + \dots \end{cases}$$

Si $\varepsilon$ est un nombre positif suffisamment petit et si:

$$-\varepsilon < t < \varepsilon,$$

chacun des seconds membres a le signe du premier terme. — Supposons :

$$c_3 \neq 0, \qquad \text{par exemple: } c_3 > 0.$$

Alors pour :

$$-\varepsilon < t < 0, \qquad 0 < t < \varepsilon,$$

on a respectivement :

$$z < 0, \qquad z > 0.$$

On voit donc que le plan osculateur *traverse* la courbe à l'origine.

Cette conclusion subsiste si $c_3$ est nul, pourvu que le premier coefficient de $z$, ne s'annulant pas, soit d'ordre impair.

Remarque. — Si la courbe $\Gamma$ se réduit à une courbe plane, le plan osculateur en un point quelconque se confond avec le plan de la courbe.

# CHAPITRE II

## ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE COURBES A UN PARAMÈTRE

### § 1. — *Enveloppe d'une famille de droites à un paramètre*

Supposons que, dans les équations générales d'une droite :

$$\text{(D)} \qquad X = x + at, \qquad Y = y + bt, \qquad Z = z + ct,$$

on remplace les coefficients $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$, par des fonctions données d'un paramètre $(s)$ :

$$x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s), \quad a = f_1(s), \quad b = g_1(s), \quad c = h_1(s).$$

On dit que les droites D, qui correspondent aux diverses valeurs de $s$, constituent une *famille* de droites à un paramètre $(s)$. La surface, engendrée par la droite variable D, est appelée une *surface réglée.* La courbe $\Gamma$ définie par les équations :

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s),$$

est dite une *directrice* de la surface ; le point M de la génératrice D, situé sur la directrice, est dit le pied de la génératrice (*fig.* 1).

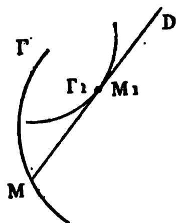



Fig. 1.

Ceci posé, il peut arriver que les droites D aient une *enveloppe*, c'est-à-dire soient tangentes à une même courbe $\Gamma_1$. Dans ce cas, on dit que

la surface réglée est *développable*. Cherchons à quelle condition doivent être assujetties les fonctions données $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ pour que cette circonstance se présente.

A chaque droite D, de paramètre $s$, faisons correspondre un point $M_1$ situé sur D, la loi de correspondance étant définie par :

$$t = \varphi(s).$$

Nous sommes amenés à résoudre cette question :

Peut-on déterminer la fonction $\varphi$ de manière que la tangente en $M_1$ à la courbe $\Gamma_1$, lieu du point $M_1$, coïncide avec $M_1D$ ?

Les équations de $\Gamma_1$ sont :

$$(\Gamma_1) \quad x_1 = x + a\varphi, \qquad y_1 = y + b\varphi, \qquad z_1 = z + c\varphi.$$

La tangente en $M_1$ a donc comme coefficients de direction :

$$dx + ad\varphi + \varphi da, \qquad dy + bd\varphi + \varphi db, \qquad dz + cd\varphi + \varphi dc.$$

D'ailleurs les coefficients de direction de D sont $a$, $b$, $c$; donc $\varphi$ est déterminée par :

$$(1) \quad \frac{dx + ad\varphi + \varphi da}{a} = \frac{dy + bd\varphi + \varphi db}{b} = \frac{dz + cd\varphi + \varphi dc}{c}.$$

Pour que la détermination de $\varphi$ soit possible, il faut et il suffit que les deux équations (1) se réduisent à une, c'est-à-dire que:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette condition est remplie, les droites D ont une enveloppe et cette enveloppe $\Gamma_1$ est définie par les équations $(\Gamma_1)$, où $\varphi$ est donnée par les équations (1) :

Remarque. — On définit souvent une famille de droites D par les équations :

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

où $a$, $b$, $p$, $q$ sont des fonctions déterminées d'un paramètre $(s)$

$$(\Gamma) \qquad \begin{aligned} a &= \varphi(s), & b &= \psi(s), \\ p &= f(s), & q &= g(s). \end{aligned}$$

La trace M $(p, q)$ de la droite D (*fig.* 2) sur le plan des $xy$ décrit une courbe $\Gamma$; on prend cette courbe pour directrice de la surface réglée engendrée par D.

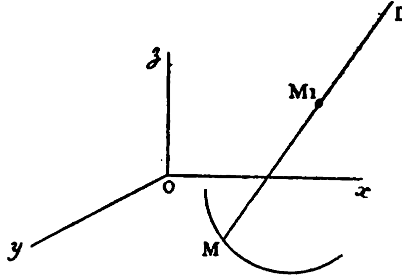



Fig. 2.

Ceci posé, cherchons à quelle condition les droites D ont une enveloppe. On pourrait appliquer le résultat précédent, mais il est plus simple de refaire la théorie.

A chaque droite D faisons correspondre un point déterminé $M_1$ situé sur D, la loi de correspondance étant définie par :

$$z_1 = \varphi(s),$$

où $z_1$ désigne la cote de $M_1$. Le lieu du point $M_1$ est la courbe $\Gamma_1$, représentée par :

$$(\Gamma_1) \qquad x_1 = a\varphi + p, \qquad y_1 = b\varphi + q, \qquad z_1 = \varphi.$$

Nous sommes amenés à résoudre la question suivante :

Peut-on déterminer la fonction $\varphi$ de manière que la tangente en $M_1$ à la courbe $\Gamma_1$ se confonde avec $M_1D$ ?

Les équations qui déterminent $\varphi$ sont :

$$\frac{ad\varphi + \varphi da + dp}{a} = \frac{bd\varphi + \varphi db + dq}{b} = \frac{d\varphi}{1},$$

c'est-à-dire :

$$(1) \qquad \varphi da + dp = 0, \qquad \varphi db + dq = 0.$$

Pour que les droites D aient une enveloppe, il faut donc et il suffit que l'on ait identiquement :

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

Si cette condition est remplie, l'enveloppe est définie par les équations $(\Gamma_1)$, où $\varphi$ est déterminée par l'une des équations (1).

## § 2. — *Enveloppe d'une famille de courbes à un paramètre*

Soient :

$$(\Gamma) \quad x = a_0 + a_1 t + \ldots, \quad y = b_0 + b_1 t + \ldots, \quad z = c_0 + c_1 t + \ldots$$

les équations d'une courbe Γ. Supposons que les coefficients soient des fonctions déterminées d'un paramètre $(s)$, de sorte que :

$$x = f(t, s), \qquad y = g(t, s), \qquad z = h(t, s).$$

On dit que les courbes Γ, qui correspondent aux diverses valeurs de $(s)$, forment une famille de courbes à un paramètre $(s)$. Cherchons si les courbes Γ ont une enveloppe, c'est-à-dire sont toutes tangentes à une même courbe E. Pour résoudre cette question, il suffit de généraliser la méthode suivie précédemment. A chaque courbe Γ, de paramètre $s$, faisons correspondre un point déterminé $M_1$ défini par :

$$(1) \qquad x_1 = f(t, s), \qquad y_1 = g(t, s), \qquad z = h(t, s),$$

où :

$$t = F(s).$$

Soit E la courbe lieu des points $M_1$ ; cette courbe est définie par les équations (1), où $t$ est supposée remplacée par $F(s)$. Ceci posé, peut-on déterminer la fonction $F(s)$ de manière que la tangente à la courbe E au point $M_1$ soit précisément la tangente à la courbe Γ ?

En écrivant que les coefficients de direction des deux tangentes sont proportionnels, on trouve :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial t} F'(s) + \frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} F'(s) + \frac{\partial g}{\partial s}}{\frac{\partial g}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial h}{\partial t} F'(s) + \frac{\partial h}{\partial s}}{\frac{\partial h}{\partial t}},$$

ou bien :

$$(2) \qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{\frac{\partial g}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial h}{\partial s}}{\frac{\partial h}{\partial t}}.$$

Pour que les courbes Γ aient une enveloppe, il faut et il suffit que ces deux équations déterminent pour $t$ la même fonction de $s$.

**Remarque.** — Supposons que la famille de courbes à un paramètre soit définie par les équations :

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0, \qquad g(x, y, z, a) = 0.$$

A chaque courbe Γ de paramètre $a$, faisons correspondre un point P, situé sur la courbe ; de sorte que, la courbe étant donnée, le point P soit bien déterminé. Les coordonnées de ce point P sont donc des fonctions déterminées de $(a)$ :

$$(2) \qquad x = \varphi(a), \qquad y = \psi(a), \qquad z = \chi(a).$$

Remarquons que, par suite de la définition du point P, ces expressions satisfont, *quel que soit a*, aux équations (1).

Soit E la courbe lieu du point P, courbe définie par les équations (2). Cherchons à quelle condition les tangentes en P à la courbe E et à la courbe Γ se confondent. A cet effet, concevons qu'on ait exprimé les coordonnées d'un point quelconque de Γ en fonction d'une même variable $t$ ; les différentielles $dx$, $dy$, $dz$, prises par rapport à cette variable, satisfont à :

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = 0.$$

Pour que les deux tangentes en question se confondent, il faut et il suffit que :

$$\frac{dx}{\varphi'(a)} = \frac{dy}{\psi'(a)} = \frac{dz}{\chi'(a)},$$

c'est-à-dire :

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \varphi'(a) + \dfrac{\partial f}{\partial y} \psi'(a) + \dfrac{\partial f}{\partial z} \chi'(a) = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} \varphi'(a) + \dfrac{\partial g}{\partial y} \psi'(a) + \dfrac{\partial g}{\partial z} \chi'(a) = 0. \end{cases}$$

Or, en vertu de la définition des fonctions $\varphi$, $\psi$, $\chi$, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \varphi'(a) + \dfrac{\partial f}{\partial y} \psi'(a) + \dfrac{\partial f}{\partial z} \chi'(a) + \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} \varphi'(a) + \dfrac{\partial g}{\partial y} \psi'(a) + \dfrac{\partial g}{\partial z} \chi'(a) + \dfrac{\partial g}{\partial a} = 0. \end{cases}$$

Donc, pour que les courbes $\Gamma$ aient une enveloppe, il faut et il suffit qu'il existe trois fonctions $x$, $y$, $z$ de $a$ satisfaisant *identiquement* à :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} = 0, \quad f = 0, \quad g = 0.$$

Supposons cette condition remplie, et soient :

$$\text{(E)} \qquad a = \varphi(a), \qquad y = \psi(a), \qquad z = \chi(a),$$

les trois fonctions, l'enveloppe est définie par ces équations.

*Cas où les courbes de la famille sont planes.* — Une famille de courbes planes à un paramètre a toujours une enveloppe. En effet, on peut mettre les équations de la famille sous la forme :

$$\text{(4)} \qquad x = f(t, s), \qquad g = y(t, s), \qquad z = 0,$$

ou encore :

$$\text{(5)} \qquad f(x, y, a) = 0, \qquad z = 0.$$

Les conditions précédentes sont alors évidemment vérifiées. Dans le premier cas, l'enveloppe est définie par les équations (4), où $t$ et $s$ sont liées par :

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial s}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial s}}{\dfrac{\partial g}{\partial t}}.$$

Dans le deuxième cas, l'enveloppe est définie par :

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

# DEUXIÈME PARTIE

# PROPRIÉTÉS DESCRIPTIVES DES SURFACES COURBES

## CHAPITRE PREMIER

## PLAN TANGENT. — ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE SURFACES A UN OU DEUX PARAMÈTRES

### § 1. — *Préliminaires*

Nous considérerons dans la suite une surface S comme le lieu des points dont les coordonnées cartésiennes $x$, $y$, $z$, sont des fonctions données de deux variables indépendantes $u$ et $v$ :

$$(1) \qquad x = f(u,v), \qquad y = g(u,v), \qquad z = h(u,v). \quad (^1)$$

Nous supposerons que, dans le voisinage d'un système $(u_0, v_0)$, les fonctions $f$, $g$, $h$ sont développables en série suivant les puissances croissantes de $(u - u_0)$, $(v - v_0)$ (sauf pour quelques valeurs exceptionnelles de $u_0$, $v_0$) :

$$\begin{aligned} f(u, v) &= a_0 + a_1 (u - u_0) + a_2 (v - v_0) + \dots \quad u_0 - \alpha < u < u_0 + \alpha, \\ g(u, v) &= b_0 + b_1 (u - u_0) + b_2 (v - v_0) + \dots \quad v_0 - \beta < v > v_0 + \beta. \\ h(u, v) &= c_0 + c_1 (u - u_0) + c_2 (v - v_0) + \dots \end{aligned}$$

A chaque système de valeurs $(u, v)$ correspond un point déterminé M $(x, y, z)$ ; ces nombres $(u, v)$ sont dits les coordonnées *superficielles* du point M. Il est clair, d'ailleurs, que le point M peut admettre plu-

(1) Bien entendu les fonctions $f$, $g$, $h$ ne satisfont pas simultanément aux trois identités :

$$\frac{D(f, g)}{D(u, v)} = 0, \qquad \frac{D(g, h)}{D(u, v)} = 0, \qquad \frac{D(h, f)}{D(u, v)} = 0,$$

sans quoi $x$, $y$, $z$, seraient fonctions d'une seule variable indépendante, et les équations (1) définiraient une courbe et non une surface.

sieurs systèmes de coordonnées et même une infinité. Cette circonstance se présente par exemple si :

$$f(u, v) = \sin v \cos u, \quad g(u, v) = \sin v \sin u, \quad h(u, v) = \cos v.$$

Dans ce cas, la surface est une sphère, de rayon égal à l'unité, ayant pour centre l'origine.

Une courbe C, tracée sur la surface, peut être considérée comme le lieu des points M $(u, v)$, définis par :

$$u = \varphi(t), \quad v = \varphi(t),$$

ou bien :

$$v = F(u).$$

En particulier, considérons les lignes de la surface, obtenues en supposant :

$$v = C^{te};$$

dans les équations (1), ces lignes sont appelées des *lignes coordonnées* ; elles forment une famille à un paramètre $(v)$. Une seconde famille de lignes coordonnées est obtenue en supposant dans les équations (1) ;

$$u = C^{te}.$$

Nous désignerons par U une ligne quelconque de la première famille, par V une ligne quelconque de la seconde.

Par chaque point M $(u_0, v_0)$ de la surface passe une ligne U :

$$\text{(U)} \qquad x = f(u, v_0), \quad y = g(u, v_0), \quad z = h(u, v_0),$$

et une ligne V :

$$\text{(V)} \qquad x = f(u_0, v), \quad y = g(u_0, v), \quad z = h(u_0, v).$$

Exemple I. — *Équations d'un cône.* — Prenons pour origine O le sommet du cône et pour directrice une courbe $(\Gamma)$, tracée sur la sphère de rayon égal à l'unité, ayant pour centre le point O.

Soient :

$$\alpha = f(v), \qquad \beta = g(v), \qquad \gamma = h(v), \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

les équations de la directrice $(\Gamma)$ et soit $m$ un point de cette courbe. Nous prendrons pour direction positive de la génératrice $Om$ la direction de O vers $m$.

Les coordonnées $(x, y, z)$ d'un point M de la génératrice O$m$ sont données par :

$$(2) \qquad x = \alpha u, \qquad y = \beta u, \qquad z = \gamma u,$$

où $u$ désigne la valeur algébrique du segment OM. Les équations (2) sont les équations cherchées.

Exemple II. — *Équations d'un tore.* — Prenons pour axe des $z$ l'axe de révolution et pour origine la projection sur cet axe du centre C du

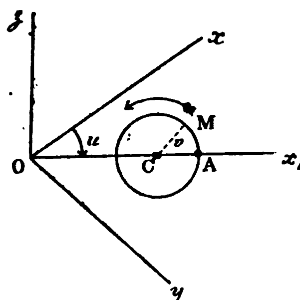



Fig. 3.

cercle générateur. Supposons l'origine des arcs du cercle générateur au point A le plus éloigné de l'axe ; enfin soient (*fig.* 3) :

$$R = CA, \qquad a = OC.$$

La position d'un point M du tore est complètement déterminée si on se donne la valeur algébrique R$v$ de l'arc AM et :

$$u = \widehat{Ox, Ox_1}.$$

On trouve alors immédiatement pour les équations du tore :

$$(3) \qquad \begin{cases} x = (a + R\cos v)\cos u, \\ y = (a + R\cos v)\sin u, \\ z = \qquad R\sin u. \end{cases}$$

*Remarques sur les coordonnées polaires.* — Dans les applications de l'analyse à la géométrie, on utilise souvent les trois coordonnées polaires d'un point. Je crois devoir rappeler la définition de ces quantités. Soit $m$ la projection d'un point quelconque M $(x, y, z)$ de l'espace

sur le plan des $xy$. Désignons par $\rho_1$ et $\psi$ les coordonnées polaires du point $m$ dans le plan des $xy$ (la définition des coordonnées polaires en

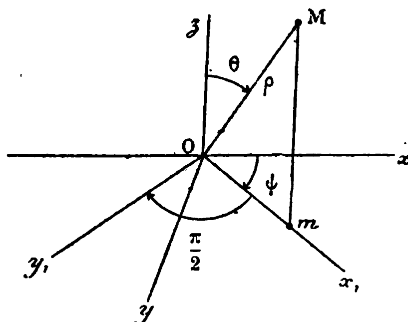



Fig. 4.

géométrie plane est supposée connue). Soit $Ox_1$ la demi-droite définie par (*fig.* 4) :

$$\widehat{Ox, Ox_1} = \psi.$$

Traçons la demi-droite $Oy_1$ perpendiculaire à $Ox_1$ et telle que :

$$\widehat{Ox_1, Oy_1} = +\frac{\pi}{2}.$$

Enfin, supposons l'orientation du plan $zOx_1$ définie par $Oy_1$ et soient $(\theta, \rho)$ les coordonnées polaires du point M dans le plan $zOx$, quand on prend O pouur pôle et $Oz$ pour axe polaire. Les coordonnées polaires du point M sont par définition $(\psi, \theta, \rho)$. Calculons $x$, $y$, $z$ en fonction $\psi$, $\theta$, $\rho$. Le théorème des projections donne :

$$x = \rho_1 \cos\psi, \qquad y = \rho_1 \sin\psi, \qquad z = \rho\cos\theta.$$

Le même théorème donne encore :

$$\rho_1 = \rho \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \rho \sin\theta;$$

donc :

$$(1) \qquad x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\psi, \qquad z = \rho\cos\theta.$$

Quand le point M se déplace, ses coordonnées polaires *peuvent varier de* $-\infty$ à $+\infty$.

Les équations :

$$(3) \qquad \psi = f(t), \qquad \theta = g(t), \qquad \rho = h(t),$$

définissent une courbe gauche $\Gamma$ ; mais il est aisé de voir que la courbe $\Gamma$ peut être représentée par plusieurs systèmes tels que (3). Ainsi, par exemple, les équations :

$$\psi = a, \qquad \theta = t, \qquad \theta = \mathrm{R},$$

où $a$ et R sont constants, définissent un méridien de la sphère ayant pour centre O et pour rayon R. Mais les équations

$$\psi = a + k\pi, \qquad \theta = t, \qquad \rho = \mathrm{R},$$

où $k$ désigne un entier quelconque, définissent le même méridien.

Dans les deux cas, il suffit, pour obtenir tous les points du méridien, de faire varier $t$ de O à $2\pi$.

On pourrait dans la définition des coordonnées polaires d'un point limiter les intervalles dans lesquels peuvent varier $\rho$, $\theta$ et $\varphi$ et prendre pour coordonnées polaires du point M le système *unique*, défini par :

$$\rho > 0, \qquad 0 < \theta < \pi, \qquad 0 < \psi < 2\pi.$$

Cette définition présente des inconvénients dans la pratique. Par exemple, on ne pourrait, en l'adoptant, représenter le méridien considéré par un système d'équations de la forme (3). On serait obligé de représenter séparément chaque demi-méridien ; car, pour le premier :

$$\psi = a, \qquad \theta = t, \qquad \rho = \mathrm{R}, \qquad 0 < t < \pi,$$

et :

$$\psi = a + \pi, \qquad \theta = t, \qquad \rho = \mathrm{R}, \qquad 0 < t < \pi,$$

pour le second.

## § 2. — *Plan tangent*

Considérons sur la surface S un point M de coordonnées superficielles $(u, v)$ et cherchons le plan tangent en ce point.

Soient

$$u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t),$$

les équations d'un arc de courbe AB passant par ce point et tracé sur

la surface ; supposons que le point M corresponde à la valeur $t$ de la variable indépendante (*fig.* 5).

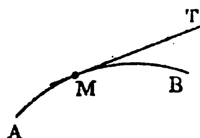



Fig. 5.

On a vu que l'on peut prendre pour coefficients de direction de la tangente MT à l'arc AB les différentielles $dx$, $dy$, $dz$, prises par rapport à $t$ ; ces quantités sont données par

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv;$$

de là on tire :

$$l dx + m dy + n dz = 0,$$

en posant :

$$l = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad m = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad n = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Supposons qu'au point M ces trois quantités ne soient pas nulles ; comme elles ne dépendent que du point M et nullement de l'arc AB, on voit que :

Le lieu des tangentes de la surface, menées par le point M, est le plan défini par l'équation :

$$(1) \qquad l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0,$$

que l'on peut aussi écrire sous forme de déterminant :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan est, par définition, le plan tangent au point M.

L'équation (2) est celle du plan qui contient les deux tangentes aux lignes coordonnées passant par M. Cette propriété permet, dans la pratique, de retrouver rapidement l'équation du plan tangent.

*Cas particuliers.* — Supposons la surface définie par

$$z = F(x, y);$$

on peut appliquer le résultat précédent; il suffit de supposer un instant la surface définie par :

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = F(u, v);$$

on trouve que l'équation du plan tangent au point M $(x, y, z)$ est :

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0,$$

où :

$$p = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Supposons, enfin, la surface définie par :

$$F(x, y, z) = 0;$$

on voit aisément que le plan tangent au point $(x,y,z)$ est défini par :

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

## § 3. — *Enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre*

Considérons les surfaces à un paramètre $(a)$

$$(1) \qquad x = f(u, v, a), \qquad y = g(u, v, a), \qquad z = h(u, v, a).$$

A chaque surface S de paramètre $(a)$ faisons correspondre une courbe déterminée $\Gamma$ située sur la surface et définie par

$$(2) \qquad v = \varphi(u, a).$$

Le lieu de la courbe $\Gamma$, quand $a$ varie, est une surface E. Peut-on disposer de la fonction $\varphi$ de manière que la surface S soit tangente à E en chaque point de $\Gamma$ ?

Les coordonnées d'un point quelconque de E peuvent aisément être exprimées au moyen de deux variables indépendantes $a$ et $t$ ; il suffit, en effet, de remplacer dans (1) $v$ par sa valeur (2).

Les lignes coordonnées de la surface E, obtenues en supposant

$$a = C^{te},$$

sont les courbes Γ.

Considérons la courbe Γ correspondant à une valeur $a$ du paramètre. Le plan tangent à la surface E en un point quelconque M de Γ est défini par la tangente MT à la courbe Γ et par la tangente MT′ à la deuxième ligne coordonnée passant par le point M.

Pour que la surface S soit tangente en M à la surface E, il faut et il suffit que la droite MT′ soit tangente à S. Les coefficients de direction de MT′ sont :

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial a}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial a}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial a}.$$

La condition précédente peut donc être formulée ainsi :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire en simplifiant :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

On voit donc que le problème est possible et que la fonction $v$ cherchée est définie par l'équation (3).

La courbe Γ, correspondant à une surface S, est appelée la *caractéristique* de cette surface. La surface E est appelée la surface *enveloppe* de la surface variable S.

Remarque I. — Supposons la famille de surfaces définie par :

$$z = F(x, y, a),$$

c'est-à-dire par les trois équations :

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = F(u, v, a);$$

l'équation (3) devient alors :

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0.$$

La caractéristique d'une surface S de paramètre $(a)$ est alors définie par :

$$(\Gamma) \left\{ \begin{array}{l} z = F(x, y, a), \\ \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0. \end{array} \right.$$

La surface enveloppe E est le lieu de ces courbes $\Gamma$. On obtient son équation cartésienne en éliminant $(a)$ entre les deux équations $(\Gamma)$. Mais ce calcul n'est pas avantageux ; en général, il est préférable de résoudre les équations $(\Gamma)$ par rapport à $x$, $y$.

$$x = \varphi(z, a), \qquad y = \psi(z, a).$$

La surface E est alors définie par :

$$x = \varphi(u, a), \qquad y = \psi(u, a) \qquad z = u.$$

II. — Les équations :

$$(\Gamma) \qquad z = F(x, y, a), \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0$$

de la caractéristique mettent en évidence une propriété géométrique importante de cette courbe.

Considérons la surface $S_a$ $\quad z = F(x, y, a)$,
et la surface voisine $S_{a+h}$ $\quad z = F(x, y, a + h)$;
ces deux surfaces se coupent suivant une courbe $\Gamma'$ qui a pour limite $\Gamma$, lorsque $h$ tend vers zéro.

III. — Les caractéristiques $\Gamma$ ont une enveloppe. En effet, pour que la famille de courbes

$$z = F(x, y, a), \qquad G(x, y, a) = 0,$$

aient une enveloppe, il faut et il suffit que les quatre équations :

$$z = F(x, y, a), \qquad G = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial a} = 0.$$

soient, quel que soit $(a)$, résolubles par rapport à $x$, $y$, $z$. Cette condition est évidemment réalisée si $G = \frac{\partial F}{\partial a}$.

L'enveloppe des caractéristiques est définie par les trois équations :

$$z = F(x, y, a), \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0. \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0.$$

IV. — Si la famille de surfaces est définie par :

$$F(x, y, z, a) = 0$$

il est clair que la caractéristique d'une surface de paramètre $(a)$ est définie par :

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0.$$

L'enveloppe des caractéristiques est alors représentée par :

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0.$$

Nous verrons dans le chapitre suivant des applications de cette théorie générale.

### § 4. — *Enveloppe d'une famille de surfaces à deux paramètres*

Considérons les surfaces à deux paramètres $a$, $b$, définies par :

$$(1) \quad x = f(u, v, a, b), \quad y = g(u, v, a, b), \quad z = h(u, v, a, b).$$

A chaque surface $S_{ab}$ de paramètres $(a, b)$ faisons correspondre un point déterminé $M_{ab}$, situé sur la surface :

$$(2) \qquad u = \varphi(a, b), \qquad v = \psi(a, b).$$

Le lieu de ces points $M_{ab}$, quand $a$ et $b$ varient, est une surface E. Peut-on déterminer la correspondance, c'est-à-dire les fonctions $\varphi$ et $\psi$, de manière que la surface $S_{ab}$ soit tangente à la surface E au point $M_{ab}$ ?

Les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque de la surface E peuvent aisément être exprimées au moyen de deux variables indépendantes $a$ et $b$ ; il suffit de porter les valeurs (2) dans les équations (1).

Pour trouver les fonctions $\varphi$ et $\psi$ satisfaisant à la question, exprimons

que le plan tangent à $S_{ab}$ au point $M_{ab}$ contient les tangentes aux *lignes coordonnées* de E, qui passent par le point $M_{ab}$.

Les coefficients de direction de ces deux tangentes sont respectivement :

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial b}+\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial b}+\frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial b}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial b}+\frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial b} \end{array}\right|$$

Les équations cherchées sont donc :

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array}\right| = 0, \qquad \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array}\right| = 0.$$

Ces équations déterminent, en général, plusieurs valeurs pour les fonctions $\varphi$ et $\psi$. Les points $M_{ab}$, correspondant à une surface $S_{ab}$, sont appelés les points *caractéristiques*. La surface E, lieu de ces points caractéristiques, est dite l'enveloppe des surfaces $S_{ab}$.

Il peut arriver, dans des cas exceptionnels, que le lieu des points $M_{ab}$ ne soit pas une surface, mais une courbe C ; dans ce cas, la surface $S_{ab}$ est tangente à la courbe C au point $M_{ab}$.

En effet, le calcul précédent exprime que le plan tangent à la surface $S_{ab}$ au point $M_{ab}$ contient la tangente à la courbe C menée par ce point.

Remarque I. — Supposons la famille des surfaces définie par :

$$z = F(x, y, a, b).$$

En appliquant le résultat précédent, on voit que les points caractéristiques sont définis par:

$$z = F(x, y, a, b), \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

L'équation cartésienne de l'enveloppe E peut être obtenue en éliminant $a$ et $b$ entre ces équations. Mais il est, en général, beaucoup plus avantageux de définir la surface E au moyen des trois équations :

$$(E)\qquad x = \varphi(a, b), \qquad y = \psi(a, b), \qquad z = \chi(a, b).$$

obtenues en résolvant par rapport à $x$, $y$, $z$ les équations précédentes.

Si la famille est définie par:

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

on voit immédiatement par ce qui précède que les points caractéristiques sont donnés par:

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

II. — Les points caractéristiques d'une surface $S_{ab}$ de la famille:

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

sont les points communs aux deux courbes:

$$\left\{\begin{array}{l} F = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} F = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0. \end{array}\right.$$

La première est la courbe caractéristique de $S_{ab}$ quand $(a)$ varie seule; la deuxième est la courbe caractéristique de $S_{ab}$ quand $b$ varie seule.

Appliquons cette théorie à un exemple particulier.

## § 5. — *Enveloppe de sphères*

Soit:

$$(1) \qquad (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = R^2,$$

l'équation d'une sphère S, dépendant des deux paramètres $u$ et $v$, de sorte que:

$$(2) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

$$(3) \qquad R = \theta(u, v).$$

Soit $\Sigma$ la surface définie par (2); on voit qu'à chaque point $M(u, v)$ de la surface $\Sigma$ correspond une sphère déterminée S. Cherchons les points caractéristiques de cette sphère.

D'après ce qui précède, ces points sont définis par l'équation (1) et

les deux suivantes :

$$(4)\quad (X-x)\frac{\partial x}{\partial u}+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial u}+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial u}+R\frac{\partial \theta}{\partial u}=0,$$

$$(5)\quad (X-x)\frac{\partial x}{\partial v}+(Y-y)\frac{\partial y}{\partial v}+(Z-z)\frac{\partial z}{\partial v}+R\frac{\partial \theta}{\partial v}=0.$$

Donc les points cherchés sont à l'intersection de la sphère S et de la droite D définie par les équations (4) et (5). Cette droite D est perpendiculaire au plan tangent $\Pi$, mené par le point M à la surface $\Sigma$.

La sphère S a donc deux points caractéristiques $P_1$ et $P_2$, symétriques par rapport au plan $\Pi$.

Proposons-nous de déterminer la fonction $\theta\ (u, v)$ de manière que ces deux points $P_1$ et $P_2$ soient confondus.

A cet effet, exprimons que les coordonnées (X, Y, Z) d'un quelconque des deux points $P_1$, $P_2$ satisfaisant à l'équation du plan $\Pi$ :

$$(6)\quad \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

La fonction $\theta\ (u, v)$ est déterminée par l'équation obtenue en éliminant X, Y, Z entre les équations (1), (4), (5), (6). Pour effectuer cette élimination simplement, il suffit d'élever au carré le déterminant (6), ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial \theta}{\partial u} \\ F & G & \frac{\partial \theta}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

ou bien :

$$\frac{G\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2-2F\frac{\partial \theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial v}+E\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2}{EG-F^2}=1.$$

Telle est l'équation qui détermine $\theta$; c'est une *équation aux dérivées partielles du premier ordre*. Supposons que l'on ait choisi pour $\theta$ une solution de cette équation, alors $P_1$ et $P_2$ sont confondus en un même

point P. Joignons chaque point M de $\Sigma$ au point correspondant P. L'ensemble des droites MP constitue une famille de droites à deux paramètres $(u, v)$, ou, comme on dit, une congruence de droites. Cette congruence a ceci de particulier que toutes les droites qui la composent sont normales à une même surface E (enveloppe de la sphère S).

Les courbes de $\Sigma$, dont chaque tangente appartient à la congruence, jouent un rôle important dans la théorie des surfaces; nous verrons qu'en un point quelconque de l'une d'elles le plan osculateur est normal à la surface $\Sigma$. Cette propriété caractérise ce qu'on appelle les *lignes géodésiques de la surface* $\Sigma$. N'ayant actuellement en vue que les propriétés *descriptives* des surfaces, nous réserverons pour plus tard l'étude de cette question.

# CHAPITRE II

## PREMIÈRES NOTIONS SUR LES SYSTÈMES DE DROITES SURFACES GAUCHES. — SURFACES DÉVELOPPABLES CONGRUENCES. — COMPLEXES.

### § 1. — *Surfaces gauches.* — *Plan tangent*

Soient :

$$(1) \qquad X = x + au, \quad Y = y + bu, \quad Z = z + cu,$$

les équations d'une droite D, et supposons que les coefficients $x, y, z, a, b, c$, soient des fonctions données d'une variable $v$ :

$$(2) \qquad x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v),$$

$$(3) \qquad a = f_1(v), \qquad b = g_1(v), \qquad c = h_1(v).$$

Le lieu de la droite D, quand $v$ varie, est ce qu'on appelle une *surface réglée ;* les diverses positions de la droite D sont les *génératrices* de

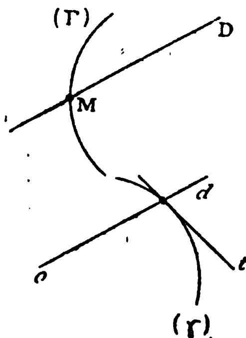



Fig. 6.

cette surface. — La courbe Γ représentée par les équations (2) est dite une *directrice* de la surface. — Le point M d'une génératrice située sur la directrice est dit le *pied* de la génératrice (*fig.* 6). — Enfin, le cône

engendré par la parallèle O$d$ à la génératrice MD est appelé le cône *directeur* de la surface. Ce cône a pour sommet le point O et pour directrice la courbe définie par les équations (3).

Il peut arriver que les génératrices soient toutes tangentes à une courbe E ; dans ce cas, la surface est dite *développable ;* pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit (V. première partie, chap. II, § 1) que l'on ait :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0.$$

Les lettres accentuées désignent des dérivées, prises par rapport à $v$.

Une surface réglée non développable est dite une surface *gauche.*

Cherchons l'équation du plan tangent en un point quelconque $A(u, v)$ d'une surface gauche, définie par les équations (1). En appliquant une équation établie au chapitre précédent, on trouve :

$$\begin{vmatrix} X - x - au & Y - y - bu & Z - z - cu \\ x' + a'u & y' + b'u & z' + c'u \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien :

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' + a'u & y' + b'u & z' + c'u \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore :

$$(4) \qquad P + uQ = 0,$$

en posant :

$$(5) \quad P = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad Q = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Remarquons que le plan :

$$P = 0$$

représente le plan tangent au pied M de la génératrice D, sur laquelle le point A a été pris. Le plan :

$$Q = 0$$

représente le plan passant par D et parallèle au plan $Odt$ tangent au cône directeur suivant la génératrice $Od$ correspondant à D.

Les deux plans P et Q sont distincts ; en effet, s'ils étaient confondus, le plan Q contiendrait la tangente à la directrice, menée par M, et on aurait :

$$\Delta = 0 ;$$

la surface serait donc développable, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ceci posé, on voit que le plan tangent, défini par (4), varie quand $u$ varie, c'est-à-dire quand le point A se déplace sur la génératrice D. On peut même démontrer que :

« Tout plan R passant par D est un plan tangent de la surface. »

En effet, l'équation du plan R est de la forme :

$$\alpha P + \beta Q = 0.$$

Donc ce plan est tangent au point de la génératrice D, défini par l'équation :

$$u = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Remarquons que, si le plan R est parallèle au plan $Odt$, son point de contact est rejeté à l'infini.

Nous étudierons d'une manière plus précise la variation du plan tangent considéré, quand nous nous occuperons des propriétés *métriques* des surfaces réglées.

Remarque. — Les considérations qui précèdent mettent en évidence ce résultat.

Théorème. — Les plans tangents aux divers points d'une génératrice d'une surface développable sont confondus. — Réciproquement, si les plans tangents en tous les points d'une génératrice arbitraire d'une surface réglée sont confondus, la surface est développable.

## § 2. — *Surfaces développables*

Nous avons déjà vu qu'une surface développable est, par définition, la surface engendrée par les tangentes d'une courbe gauche. — Cette courbe est, pour des raisons que nous verrons à l'instant, appelée l'*arête de rebroussement* de la surface.

Théorème. — La caractéristique du plan osculateur en un point M d'une courbe gauche est la tangente en ce point.

En effet, soient :

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

les équations d'une courbe gauche Γ. L'équation du plan osculateur en un point M de cette courbe est :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour trouver la caractéristique de ce plan, il suffit d'appliquer la théorie des enveloppes et la règle de différentiation des déterminants. On trouve alors qu'elle est définie par l'équation (1) et la suivante :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (2) représente un plan passant par la tangente MT à la courbe Γ. Donc l'intersection des plans (1) et (2) est cette tangente. Ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration précédente serait en défaut si les plans (1) et (2) étaient confondus.

Cette circonstance ne peut se présenter. En effet, si le plan (2) était confondu avec le plan (1), il serait parallèle à la droite de coefficients de direction $(x'', y'', z'')$, et, par suite, on aurait en chaque point M de Γ :

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0,$$

et la courbe Γ serait plane, ce qui est contraire à l'hypothèse.

*Corollaire I.* — Une surface développable est l'enveloppe des plans osculateurs de son arête de rebroussement.

*Corollaire II.* — Le plan tangent en un point quelconque P, pris sur la génératrice MT, est le plan osculateur en M à l'arête de rebroussement.

Remarque. — Nous conviendrons de dire qu'un cône est une surface développable, dont l'arête de rebroussement est un point. Un cylindre étant la limite d'un cône sera aussi considéré comme une surface développable. — La dénomination de *développables*, attribuée aux surfaces

que nous venons d'énumérer, sera complètement justifiée quand nous étudierons leurs propriétés métriques. — Nous verrons, en effet, qu'on peut représenter toutes ces surfaces sur un plan avec *conservation des angles et des arcs ;* cette propriété est déjà connue pour les cônes et cylindres.

Nous allons maintenant établir une propriété *descriptive* commune à toutes les développables; propriété que l'on prend souvent comme définition de ces surfaces.

Théorème. — L'enveloppe d'un plan P, dépendant d'un seul paramètre variable, est une surface développable.

Considérons d'abord le cas particulier où le plan P reste parallèle à une droite. En prenant cette droite pour axe des $z$, on peut mettre l'équation du plan P sous la forme :

$$Ax + By + C = 0,$$

A, B, C étant des fonctions d'un paramètre $t$. L'enveloppe est évidemment un cylindre ayant ses génératrices parallèles à O$z$. — Le théorème est donc démontré dans ce cas.

Considérons maintenant le cas général, et soit :

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan variable P. Les coefficients A, B, C, D, sont des fonctions de $t$ satisfaisant à la condition :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

En effet, si cette inégalité n'avait pas lieu, la normale au plan P resterait parallèle à un plan (V. première partie, chap. i, § 2), et, par suite, le plan P resterait parallèle à une droite, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ceci posé, la caractéristique du plan P est définie par les deux équations :

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'y + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

En vertu de la théorie des enveloppes elle reste tangente à la courbe Γ, *bien déterminée* par les trois équations (2) et (3):

$$(3) \qquad A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$$

La proposition est donc établie dans tous les cas.

Enfin, démontrons encore le théorème suivant, qui justifie la dénomination d'arête de rebroussement, attribuée à l'enveloppe des génératrices d'une développable.

Théorème. — La section d'une développable quelconque par un plan, passant par un point M de l'arête de rebroussement, présente, en général, un point de rebroussement au point M.

Prenons pour origine le point M, pour axe des $z$ la tangente en M à l'arête de rebroussement $\Gamma$, pour plan des $xy$ le plan sécant et pour axe des $x$ la tangente à la section.

Soient :

$$x = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$
$$y = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$$

les équations de $\Gamma$ dans le voisinage de l'origine; les coefficients de direction de la tangente à l'origine sont $(a_1, b_1, 1)$; donc, en vertu de l'hypothèse :

$$a_1 = 0, \qquad b_1 = 0,$$

et les équations de $\Gamma$ se réduisent à :

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} x = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \\ y = b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \end{cases}$$

La section est le lieu décrit par la trace (sur le plan sécant) de la tangente :

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z) = (2a_2 z + \dots)(Z - z),$$
$$Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z) = (2b_2 z + \dots)(Z - z).$$

Cette section a donc des équations de la forme :

$$X = A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$
$$Y = B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots$$

Supposons $A_2 \neq 0$; on voit immédiatement, en formant $\frac{Y}{X}$, que le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est $\frac{B_2}{A_2}$; donc, en vertu de l'hypothèse, on a :

$$B_2 = 0.$$

En définitive, la section est définie par :

$$(1)\qquad \begin{aligned} X &= A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots \\ Y &= \qquad\quad B_3 z^3 + \dots \end{aligned}$$

Supposons encore $B_3 \neq 0$, de sorte que :

$$A_2 B_3 \neq 0,$$

et soient par exemple :

$$A_2 > 0, \qquad B_3 > 0.$$

Alors pour des valeurs de $z$ inférieures, en valeur absolue, à un cer-




Fig. 7.

tain nombre positif $\varepsilon$, chacun des seconds membres de (1) a le signe du premier terme (*fig.* 7) :

$$\begin{aligned} -\varepsilon < z < 0, &\qquad X > 0, \qquad Y < 0 \\ 0 < z < \varepsilon, &\qquad X > 0, \qquad Y > 0. \end{aligned}$$

La courbe présente donc un point de rebroussement au point M.

Cette circonstance peut ne pas se présenter si l'une des quantités $A_2$ et $B_3$ est nulle.

## § 3. — *Congruences*

On appelle congruence rectiligne, ou simplement congruence, un ensemble de droites dépendant de deux paramètres variables. Ainsi les équations :

$$(1)\qquad X = x + at, \qquad Y = y + bt, \qquad Z = z + ct,$$

où $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$, sont des fonctions de deux paramètres $u$ et $v$, définissent une congruence. Les droites D de la congruence qui passent par un point donné $(x_1, y_1, z_1)$ forment un ensemble d'indétermination nulle ; les paramètres $(u, v)$ de l'une de ces droites sont donnés, en effet,

par les deux équations :

$$\frac{x_1 - x}{a} = \frac{y_1 - y}{b} = \frac{z_1 - z}{c}.$$

A chaque point M $(p, q)$ du plan des $xy$, faisons correspondre une droite *déterminée :*

$$(1) \quad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= \varphi(p, q), \\ b &= \psi(p, q). \end{aligned}$$

$\varphi(p, q)$ et $\psi(p, q)$ sont des fonctions bien déterminées de $p$, $q$. L'ensemble de ces droites constitue une congruence. Il est clair que la congruence la plus générale est la réunion de plusieurs congruences de cette nature. — Il nous suffit donc d'étudier les congruences définies par les équations (1).

*Points et plans focaux. — Surface focale.* — A chaque droite D de la congruence (1) faisons correspondre un plan déterminé $\Pi$ passant par cette droite ; soit :

$$(2) \quad y - bz - q - \lambda(x - az - p) = 0, \qquad \lambda = \varphi(p, q),$$

l'équation de ce plan [1]. Le plan $\Pi$ dépendant de deux paramètres variables admet un point caractéristique $M_d$ (V. théorie des enveloppes), défini par les trois équations (2), (3) et (4) :

$$(3) \quad -z\frac{\partial b}{\partial p} + \lambda\left(z\frac{\partial a}{\partial p} + 1\right) - \frac{\partial \lambda}{\partial p}(x - az - p) = 0,$$

$$(4) \quad -1 - z\frac{\partial b}{\partial q} + \lambda z\frac{\partial a}{\partial q} - \frac{\partial \lambda}{\partial q}(x - az - p) = 0.$$

Je dis qu'on peut définir la correspondance de manière que $M_d$ soit sur D. En effet, si on exprime que les valeurs de $x$, $y$, $z$, définies par (2), (3), (4), satisfont à 1, on trouve :

$$-z\frac{\partial b}{\partial p} + \lambda\left(z\frac{\partial a}{\partial p} + 1\right) = 0,$$

$$-1 - z\frac{\partial b}{\partial q} + \lambda z\frac{\partial a}{\partial q} = 0,$$

[1] La quantité $\lambda$ est précisément le coefficient angulaire de la trace du plan $\Pi$ sur le plan des $xy$.

et, par suite :

$$\begin{vmatrix} \lambda \frac{\partial a}{\partial p} - \frac{\partial b}{\partial p} & \lambda \\ \lambda \frac{\partial a}{\partial q} - \frac{\partial b}{\partial q} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit donc de prendre pour λ une racine de :

$$(5) \qquad \lambda^2 \frac{da}{\partial q} + \lambda \left(\frac{\partial a}{\partial p} - \frac{db}{\partial q}\right) - \frac{\partial b}{\partial p} = 0.$$

Les plans $\Pi_1$ et $\Pi_2$ (réels ou imaginaires), qui correspondent aux deux racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$, seront appelés les *plans focaux* correspondant à la droite D.

Les points caractéristiques $F_1$ et $F_2$ de ces plans sont dits les *points focaux* de la droite D.

Soient $S_1$ et $S_2$ les lieux respectifs de ces points, quand $p$ et $q$ varient ; en général, $S_1$ et $S_2$ sont de véritables surfaces ; leur ensemble constitue la *surface focale* de la congruence. D'après la théorie des enveloppes, les plans focaux sont respectivement tangents à $S_1$ et $S_2$ aux points $F_1$ et $F_2$. Les droites D sont donc tangentes aux surfaces $S_1$ et $S_2$.

Supposons maintenant que $S_1$, par exemple, se réduise à une courbe et que $S_2$ soit une surface.

Dans ce cas, le plan focal $\Pi_1$ est encore (II, chap. I, § 4) le plan tangent à $S_1$ passant par la droite D. Les droites D sont tangentes à la surface $S_2$, mais sécantes à la courbe $S_1$.

On examinera de même le cas où $S_1$ et $S_2$ sont des courbes.

Remarquons que la définition adoptée pour les points et les plans focaux est absolument indépendante de la nature *particulière* de la *surface focale.*

*Développables de la congruence.* — Proposons-nous de grouper les droites de la congruence de manière à former une développable. On peut poser le problème ainsi :

Quelle doit être la courbe décrite par le point M $(p, q)$ pour que la droite correspondante engendre une développable ?

L'équation du problème est :

$$\frac{dp}{da} = \frac{dq}{db},$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \frac{dp}{\frac{\partial a}{\partial p} dp + \frac{\partial a}{dq} dq} = \frac{dq}{\frac{\partial b}{\partial p} dp + \frac{\partial b}{\partial q} dq},$$

L'équation (6) montre que :

$$\frac{dq}{dp} = \lambda_1 (p, q), \qquad \frac{dq}{dp} = \lambda_2 (p, q).$$

Il y a donc deux familles de courbes :

$$\varphi_1 (p, q) = \alpha_1, \qquad \varphi_2 (p, q) = \alpha_2,$$

satisfaisant à la question.

Par un point M du plan des $xy$ passe une courbe de chaque famille. Les tangentes en M sont précisément les traces des plans focaux ([1]).

Considérons la courbe de la première famille passant par M, courbe que nous représenterons par $(\lambda_1)$. Lorsque M décrit la courbe $(\lambda_1)$, la droite correspondante D engendre une développable $\Sigma_1$. Le plan tangent suivant MD, devant contenir la tangente MT à la courbe $(\lambda_1)$, est précisément le plan focal $\Pi_1$ (*fig.* 8).

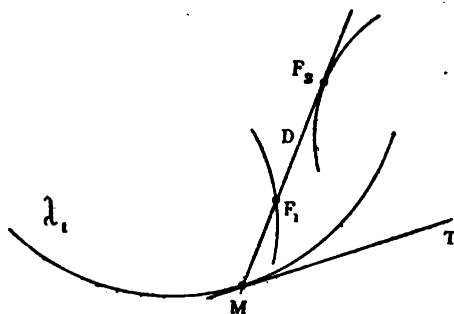



Fig. 8.

Cherchons l'arête de rebroussement de $\Sigma_1$. Le $z$ du point de cette arête situé sur D est donné par :

$$z = -\frac{dp}{da} = -\frac{1}{\frac{\partial a}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial a}{\partial q}},$$

ou, en tenant compte de (5) :

$$z = -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 \frac{da}{\partial p} - \frac{db}{\partial p}} = z_2 ;$$

$z_2$ désigne ici le $z$ du point $F_2$.

Ainsi la développable $\Sigma_1$ a pour arête de rebroussement la courbe de $S_2$, décrite par $F_2$, lorsque le point M décrit la courbe $(\lambda_1)$.

([1]) Voir la note de la page 38.

## § 4. — *Complexes*

On appelle complexe un système de droites dépendant de trois paramètres variables.

Ainsi les équations :

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

définissent un complexe, si $a$, $b$, $p$, $q$ sont des fonctions de trois paramètres, ou, ce qui revient au même, si $a$, $b$, $p$, $q$, sont liées par une relation et une seule :

$$F(a, b, p, q) = 0. \tag{2}$$

Cette équation est dite l'équation du complexe.

Par chaque point M de l'espace passe une infinité de droites du complexe; ces droites déterminent un cône, qui est le *cône du complexe* relatif au point M.

Si ce cône se réduit à un plan, quel que soit le point M, le complexe est dit *linéaire;* cherchons, dans ce cas, la forme de l'équation (2).

Toutes les droites du complexe, qui passent par le point $(p, q)$ du plan des $xy$, sont situées dans un même plan; la relation (2) doit donc être du premier degré en $(a)$ et $(b)$. Les droites du complexe, parallèles à une direction $(a, b)$, c'est-à-dire qui passent par un point à l'infini, doivent aussi être dans un même plan; leurs traces sur le plan des $xy$ doivent, par suite, être en ligne droite. Donc la relation (2) doit aussi être du premier degré en $(p, q)$, c'est-à-dire être de la forme :

$$Hap + Kbq + Maq + Nbp + Pp + Qq + Aa + Ab + Bb + C = 0,$$

les grandes lettres désignant des constantes. — Ces constantes ne sont pas toutes arbitraires; en effet, les coefficients de direction $(a, b, 1)$ d'une droite D du complexe, passant par M $(x, y, z)$, sont liés par :

$$Ha(x - az) + Kb(y - bz) + Ma(y - bz) + Nb(x - az) + \ldots = 0.$$

Le cône du complexe, relatif à M, étant un plan, cette relation doit être du premier degré en $a$ et $b$, et cela quel que soit $z$, donc :

$$H = 0, \qquad K = 0, \qquad M + N = 0.$$

En résumé :

« Pour que le complexe défini par l'équation (2) soit linéaire, il faut « et il suffit que cette équation ait la forme :

$$Aa + Bb + C + Pp + Qq + R(bp - aq) = o,$$

« A, B, C, P, Q, R désignant des constantes. »

On peut donner à cette équation une forme plus élégante, en utilisant les coordonnées de Plücker.

*Coordonnées de Plücker.* — Les équations d'une droite quelconque D peuvent être mises sous la forme :

$$(3) \qquad bz - cy = p, \qquad cx - az = q, \qquad ay - bx = r,$$

avec la condition :

$$(4) \qquad ap + bq + cr = o.$$

Réciproquement, si $a$, $b$, $c$, $p$, $q$, $r$, sont des nombres quelconques satisfaisant à (4), les équations (3) définissent une droite bien déterminée D ; ces six nombres peuvent être appelés les coordonnées plückériennes de la droite D.

On peut mettre les équations de D sous la forme :

$$x = \alpha z + \alpha', \qquad y = \beta z + \beta',$$

en posant :

$$\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \beta = \frac{b}{c}, \qquad \alpha' = \frac{q}{c}, \qquad \beta' = \frac{-p}{c}.$$

Un complexe linéaire, engendré par D, a une équation de la forme :

$$A\alpha + B\beta + C - P\beta' + Q\alpha' + R(\alpha\beta' - \beta\alpha') = o,$$

c'est-à-dire, en employant les coordonnées de Plücker :

$$(I) \qquad Aa + Bb + Cc + Pp + Qq + Rr = o.$$

*Plan polaire d'un point.* — Le plan Π qui contient toutes les droites du complexe passant par M $(x, y, z)$ est dit le plan *polaire* de ce point. Cherchons son équation.

Les coefficients de direction $a$, $b$, $c$, d'une droite quelconque du com-

plexe passant par M sont liés par :

$$Aa + Bb + Cc + P(bz - cy) + Q(cx - az) + R(ay - bx) = 0.$$

L'équation du plan polaire de M s'obtient en remplaçant $a$, $b$, $c$, respectivement par $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, ce qui donne :

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)+P(Yz-Zy)+Q(Zx-Xz)+R(Xy-Yx)=0,$$

ou bien :

$$(5)\ (Qz-Ry-A)X+(Rx-Pz-B)Y+(Py-Qx-C)Z+Ax+By+Cz=0,$$

ou encore :

$$(6)\ (QZ-RY-A)x+(RX-PZ-B)y+(PY-QX-C)z+AX+BY+CZ=0.$$

Si on a :

$$AP + BQ + CR = 0,$$

les plans polaires des divers points de l'espace passent par une droite fixe L, ayant pour équations :

$$QZ - RY = A, \qquad RX - PZ = B, \qquad PY - QX = C.$$

Le complexe est formé par les droites qui rencontrent L ; on dit que ce complexe est *singulier*.

Supposons :

$$AP + BQ + CR \neq 0.$$

L'équation (6) montre alors qu'un plan quelconque Π peut être considéré comme le plan polaire d'un de ses points.

La symétrie des équations (5) et (6) met en évidence la propriété suivante :

« Le plan polaire d'un point quelconque (X, Y, Z) du plan Π passe « par le pôle M ($x$, $y$, $z$) de ce plan ; par suite, les droites du complexe « situées dans Π concourent au point M. »

*Réduction de l'équation d'un complexe linéaire.* — Le lieu du pôle d'un plan parallèle à un plan fixe Q :

$$uX + vY + wZ = 0, \qquad (Q)$$

est évidemment la droite D définie par :

$$\frac{Qz - Ry - A}{u} = \frac{Rx - Pz - B}{v} = \frac{Py - Qx - C}{w}.$$

Cette droite D est appelée (Plücker) le diamètre *conjugué* des plans parallèles à Q.

Comme nous n'aurons pas à développer la théorie des complexes linéaires, j'indique dès maintenant une propriété *métrique* importante de ces complexes.

Si la droite D est perpendiculaire au plan Q, on dit qu'elle est un axe du complexe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R}.$$

Le complexe n'a donc qu'un seul axe, défini par :

$$\frac{Qz - Ry - A}{P} = \frac{Rx - Pz - B}{Q} = \frac{Py - Qx - C}{R}.$$

Supposons qu'on prenne cet axe pour axe des $z$ ; on voit aisément que l'équation du complexe se réduit à la forme simple :

$$kc + r = 0.$$

L'équation du plan polaire d'un point M $(x, y, z)$ est alors :

$$k(Z - z) + Xy - Yx = 0.$$

Problème. — Étant donnée la courbe :

$$(\Gamma) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t),$$

trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les tangentes appartiennent à un complexe linéaire donné.

Nous pouvons supposer qu'on ait choisi pour O$z$ l'axe du complexe, l'équation de ce complexe est alors :

$$kc + r = 0.$$

Il faut donc et il suffit qu'en chaque point M de la courbe $(\Gamma)$ on ait :

$$kc + ay - bx = 0,$$

$a$, $b$, $c$ désignant les coefficients de direction de la tangente.

Cette condition peut se mettre sous la forme :

$$(1) \qquad kdz = xdy - ydx.$$

Remarque. — Le plan polaire de M est :

$$k(Z - z) = x(Y - y) - y(X - x).$$

D'autre part, la condition (1) donne :

$$kz' = xy' - yx'$$

et aussi :

$$kz'' = xy'' - yx''.$$

Donc l'équation du plan polaire peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan polaire coïncide donc avec le plan osculateur en M.

# TROISIÈME PARTIE

# PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES LIGNES COURBES

---

## CHAPITRE PREMIER

## FORMULES FONDAMENTALES

### § 1. — *Longueur des courbes*

Soient :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \\ y = g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \\ z = h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

les équations d'une courbe gauche $\Gamma$, et soient A et B deux points de la courbe correspondant aux valeurs :

$$t = \alpha, \qquad t = \beta, \qquad \alpha < \beta,$$

de la variable indépendante. Nous supposons que, $t$ croissant de $\alpha$ à $\beta$, le point M $(x, y, z)$ décrit l'arc AB en allant toujours dans le même sens.

Ceci posé, la longueur de l'arc AB est donnée par la formule :

$$(2) \qquad \text{arc AB} = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

où $x'$, $y'$, $z'$ désignent les dérivées de $x$, $y$, $z$ par rapport à $t$.

Je ne veux pas, dans un cours élémentaire, m'étendre sur la définition de la longueur d'un arc de courbe, aussi je ne démontrerai pas la formule (2). Le lecteur pourra étudier la démonstration dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard (p. 3 et 12). Admettant la formule (2), nous allons voir comment elle conduit immédiatement à celle qui donne la valeur algébrique d'un arc de $\Gamma$.

Prenons pour origine des arcs un point O de $\Gamma$, correspondant à la

valeur $t_0$ de $t$, et soit $h$ un nombre positif; supposons que, $t$ croissant de $t_0 - h$ à $t_0 + h$, le point M $(x, y, z)$ décrive un arc $M_1M_2$ en marchant toujours dans le même sens (*fig.* 9). Ce sens sera pris pour le sens *positif* de l'arc $M_1M_2$. Pour abréger le langage, nous dirons quelquefois que nous prenons pour sens positif de la courbe, dans le voisinage de l'origine des arcs, le sens *des t croissants*.

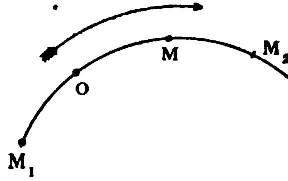



FIG. 9

M étant un point quelconque de l'arc $M_1M_2$, soit $s$ la valeur *algébrique* de l'arc OM, c'est-à-dire le nombre qui mesure la longueur de l'arc OM, précédé du signe +, si la direction $\overrightarrow{OM}$ coïncide avec la direction positive de la courbe, du signe — dans le cas contraire.

Ceci posé, si M est compris entre O et $M_2$, on a, par ce qui précède :

$$\text{arc OM} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt, \qquad s = \text{arc OM};$$

au contraire, si M est compris entre les points O et $M_1$, on a :

$$\text{arc OM} = \int_{t}^{t_0} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = -\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

et :

$$s = -\text{ arc OM}.$$

Donc, dans les deux cas :

$$\text{(I)} \qquad s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Nous appellerons $(s)$ l'abscisse curviligne du point M.

Remarquons, d'ailleurs, que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

La formule (I) va nous permettre de démontrer la proposition suivante, qui est fondamentale.

Théorème. — Si l'origine O des arcs d'une courbe n'est pas un point singulier, les coordonées $x$, $y$, $z$, d'un point quelconque M de la courbe, situé dans le voisinage du point O, sont développables suivant les puissances croissantes de l'abscisse curviligne $s$ de ce point.

Puisque l'origine n'est pas un point singulier (première partie, chap. Ier, § 3), nous pouvons choisir la variable indépendante $t$, qui fixe la position d'un point quelconque M de la courbe Γ, de manière que les dérivées $x'$, $y'$, $z'$, ne soient pas toutes nulles pour $t = t_0$. Ceci posé, considérons l'équation :

$$(3) \qquad s = \Phi(t) \text{ où : } \Phi(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Cette équation est vérifiée pour :

$$t = t_0, \qquad s = 0;$$

en outre, la fonction :

$$\Phi'(t) = + \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

ne s'annule pas pour $t = t_0$

$$\Phi'(t_0) \neq 0.$$

Donc, nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites (V. *Cours d'Analyse*) et dire :

Il existe une fonction :

$$(4) \qquad t = \psi(s),$$

et une seule : 1° prenant pour $s = 0$ la valeur $t = t_0$ ; 2° développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $s$, pour des valeurs de $s$ suffisamment petites en valeur absolue ; 3° satisfaisant à l'équation (3).

Effectuons maintenant dans les équations (1) de la courbe le changement de variable défini par (4) ; nous obtenons alors les expressions : de $x$, $y$, $z$ en fonction de l'arc $s$ correspondant à ce point. Ces expressions sont, en vertu d'un théorème connu, développables suivant les puissances croissantes de $s$, du moins dans le voisinage de l'origine des arcs.

Remarquons qu'il est très aisé de calculer les coefficients de $\psi(s)$. En

effet, l'équation (3) donne par la différentiation :

$$\varphi'.\psi' = 1,$$
$$\varphi'.\psi'' + \varphi''\psi'^2 = 0,$$
$$\varphi'\psi''' + 3\varphi''\psi'\psi'' + \varphi'''\psi'^3 = 0,$$
. . . . . . . . . . . . . .

Comme $\varphi'(t_0)$ est différent de zéro, ces équations font connaître les dérivés de $\psi(s)$, pour $s = 0$ et, par suite, aussi :

$$t = \psi(s) = t_0 + \frac{\psi'(0)}{1} s + \frac{\psi''(0)}{1.2} s^2 + \dots$$

Remarque. — Soit $r$ la valeur absolue de la corde OM :

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

où :

$$x = x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + \dots$$
$$y = y_0 + y_1 s + y_2 s^2 + \dots$$
$$z = z_0 + z_1 s + z_2 s^2 + \dots$$

Or, quel que soit $s$,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

En particulier, cette relation a lieu pour $s = 0$ ; donc :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,$$

et, par suite :

$$r^2 = s^2 + A_3 s^3 + A_4 s^4 + \dots$$

Donc :

$$\lim. \frac{\text{arc OM}}{\text{corde OM}} = 1,$$

lorsque l'arc OM tend vers zéro.

§ 2. — *Cosinus directeurs de la tangente; de la normale principale et de la binormale*

1° *Tangente.* — Soient :

$$x = x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + \dots$$
$$y = y_0 + y_1 s + y_2 s^2 + \dots$$
$$z = z_0 + z_1 s + z_2 s^2 + \dots$$

les équations de la courbe gauche $\Gamma$, lorsqu'on prend pour variable indépendante la valeur algébrique $s$ de l'arc correspondant au point M ($x$, $y$, $z$). On choisit comme direction positive de la tangente au point M celle qui correspond aux arcs $s$ croissants. Précisons cette définition.

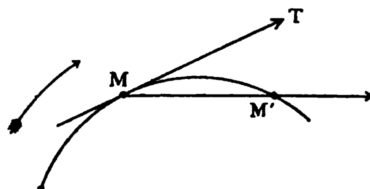



FIG. 10.

Soit M' un point de la courbe (*fig.* 10), dont l'abscisse curviligne ($s'$) soit supérieure à $s$ :

$$s' - s > 0.$$

La direction de la tangente en M est par définition la limite de la direction $\overrightarrow{MM'}$, quand $s'$ tend vers $s$.

Les cosinus directeurs de $\overrightarrow{MM'}$ sont respectivement :

$$\frac{x'-x}{r} = \frac{x'-x}{s'-s}\cdot\frac{s'-s}{r}, \qquad \frac{y'-y}{s'-s}\cdot\frac{s'-s}{r}, \qquad \frac{z'-z}{s'-s}\cdot\frac{s'-s}{r},$$

où $r$ désigne la *longueur* de la corde MM'. Le rapport positif $\frac{s'-s}{r}$ a pour limite l'unité, quand $s'$ tend vers $s$ ; donc les cosinus directeurs de la tangente MT sont donnés par les formules :

$$\alpha = \lim \frac{x'-x}{s'-s}, \qquad \beta = \lim \frac{y'-y}{s'-s}, \qquad \gamma = \lim \frac{z'-z}{s'-s},$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

REMARQUE. — Considérons sur la tangente MT un segment MA ayant pour valeur algébrique $ds$.

Les relations :

$$dx = \alpha ds, \qquad dy = \beta ds, \qquad dz = \gamma ds,$$

expriment que $dx$, $dy$, $dz$ sont les projections du segment $ds$ sur les axes de coordonnées.

2° *Normale principale.* — La normale principale en un point M de la courbe Γ est la normale MN, située dans le plan osculateur en ce point. Le choix de sa direction positive résulte des considérations suivantes :

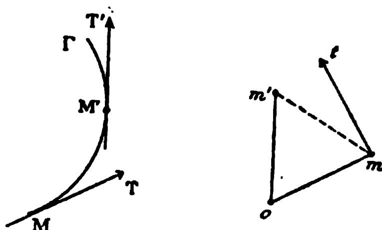



Fig. 11.

Par l'origine O des coordonnées (*fig.* 11), menons une demi-droite parallèle à la direction positive de la tangente en M et prenons sur cette droite une longueur O$m$ égale à l'unité. Lorsque le point M décrit la courbe Γ, le point $m$ décrit une courbe sphérique, qu'on appelle l'*indicatrice* sphérique de la courbe Γ. Cette courbe jouit de la propriété suivante :

Théorème. — La tangente en $m$ à l'indicatrice sphérique est parallèle à la normale principale au point correspondant M de la courbe Γ.

En effet, le plan $m$O$m'$ est parallèle à la fois aux droites MT, M'T' ; il a donc pour limite, quand $m'$ tend vers $m$, un plan O$mt$, parallèle au plan Π osculateur en M à la courbe Γ. Donc la droite $mt$ est parallèle au plan Π, comme elle est, d'ailleurs, orthogonale à MT ; la proposition est démontrée.

Ceci posé, choisissons sur l'indicatrice sphérique une direction positive quelconque ([1]), et soit $\sigma$ la valeur algébrique de l'arc correspondant au point $m$. On prend pour *direction positive* de la normale principale la direction $MN_1$, parallèle à la direction positive de la tangente $mt$. Il résulte de là que les cosinus directeurs de $MN_1$ sont :

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha}{d\sigma}, \qquad \beta_1 = \frac{d\beta}{d\sigma}, \qquad \gamma_1 = \frac{d\gamma}{d\sigma},$$

([1]) Il y a avantage à ne pas préciser dans le cas général le choix de cette direction positive ; voir à ce sujet le cas où la courbe Γ est plane (§ 9).

ou, en tenant compte des formules, qui donnent $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ :

$$\alpha_1 = \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{ds}{d\sigma}, \qquad \beta_1 = \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{ds}{d\sigma}, \qquad \gamma_1 = \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{ds}{d\sigma}.$$

3° *Binormale.* — La binormale en M est la perpendiculaire menée par le point M au plan $TMN_1$. La direction positive de la binormale est la direction $MN_2$, telle que le trièdre ($MT$, $MN_1$, $MN_2$) ait la disposition *directe* (*fig.* 12).

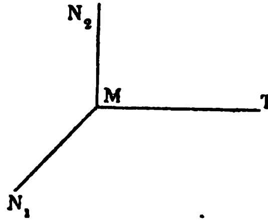



Fig. 12.

Soient $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les cosinus directeurs de $MN_2$ ; on a :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = +1.$$

En outre, chaque élément est égal au mineur qui lui correspond (pris avec son signe).

Donc :

$$\alpha_2 = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1, \qquad \beta_2 = \gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1, \qquad \gamma_2 = \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1.$$

En résumé

$$\left\{ \begin{array}{lll} \alpha = \dfrac{dx}{ds}, & \beta = \dfrac{dy}{ds}, & \gamma = \dfrac{dz}{ds}; \\ \alpha_1 = \dfrac{d^2x}{ds^2} \cdot \dfrac{ds}{d\tau}, & \beta_1 = \dfrac{d^2y}{ds^2} \cdot \dfrac{ds}{d\sigma}, & \gamma_1 = \dfrac{d^2z}{ds^2} \cdot \dfrac{ds}{d\sigma}; \\ \alpha_2 = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1 & \beta_2 = \gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1 & \gamma_2 = \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1. \end{array} \right.$$

§ 3. — *Notion de dérivée géométrique d'un segment*

Considérons un segment variable (OM), dont l'origine O est *fixe* et dont l'extrémité M se déplace d'après une loi déterminée. En d'autres termes, supposons que les projections X, Y, Z du segment (OM) sur

trois axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$, soient des fonctions données d'une même variable $u$

$$X = f(u), \qquad Y = g(u), \qquad Z = h(u).$$

Soit OM′ la position du segment pour $u = u'$ :

$$X' = f(u'), \qquad Y' = g(u'), \qquad Z' = h(u').$$

Le segment (MM′), qui a pour projections :

$$X' - X, \qquad Y' - Y, \qquad Z' - Z,$$

est appelé l'accroissement *géométrique* du segment (OM), quand la variable indépendante passe de la valeur $u$ à la valeur $u'$. Ce segment tend vers zéro, quand $u'$ tend vers $u$, mais sa ligne d'action a pour limite la tangente en M à la courbe lieu des points M.

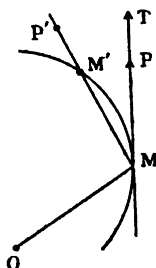



Fig. 13.

Ceci posé, considérons MP′ (*fig.* 13), qui a pour projections sur les axes :

$$\frac{X' - X}{u' - u}, \qquad \frac{Y' - Y}{u' - u}, \qquad \frac{Z' - Z}{u' - u} \qquad\qquad MP' = \frac{MM'}{u' - u}.$$

Ce segment a une limite bien déterminée, à savoir un segment (MP) dirigé suivant la tangente MT, et ayant pour projections :

$$l = \frac{dX}{du}, \qquad m = \frac{dY}{du}, \qquad n = \frac{dZ}{du}.$$

Ce segment (MP) est dit la *dérivée géométrique* du segment OM, prise par rapport à $u$.— Soit $\sigma$ l'abscisse curviligne du point M. D'après ce que l'on a vu (§ 2), $dX$, $dY$, $dZ$ sont les projections sur les trois axes d'un segment, ayant pour ligne d'action MT et pour valeur algébrique $d\sigma$ ;

donc le segment qui a pour projection $l$, $m$, $n$, a pour valeur algébrique :

$$MP = \frac{d\sigma}{du}.$$

*Relation entre les dérivées géométriques de trois segments rectangulaires.* — Considérons un trièdre trirectangle, ayant pour sommet un point fixe O et admettant un mouvement déterminé. Les cosinus directeurs des arêtes sont alors des fonctions déterminées d'une même variable $u$ :

$$\begin{array}{llll}
(OM) & \alpha = f(u), & \beta = g(u), & \gamma = h(u); \\
(OM_1) & \alpha_1 = f_1(u), & \beta_1 = g_1(u), & \gamma_1 = h_1(u); \\
(OM_2) & \alpha_2 = f_2(u), & \beta_2 = g_2(u), & \gamma_2 = h_2(u).
\end{array}$$

Considérons les segments directeurs OM, $OM_1$, $OM_2$ des trois arêtes; entre les dérivés géométriques MP, $M_1P_1$ et $M_2P_2$ de ces trois segments existe une relation simple, que nous allons établir (*fig.* 14).

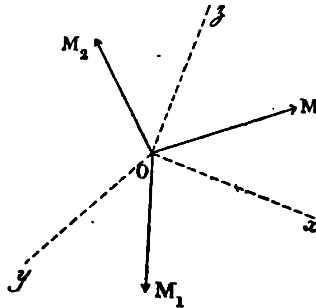


FIG. 14.

A cet effet désignons les projections des trois segments MP, $M_1P_1$, $M_2P_2$, sur les trois arêtes du trièdre, comme l'indique le tableau suivant :

| (T) | | MP | $M_1P_1$ | $M_2P_2$ |
|---|---|---|---|---|
| | OM | $l$ | $l_1$ | $l_2$ |
| | $OM_1$ | $m$ | $m_1$ | $m_2$ |
| | $OM_2$ | $n$ | $n_1$ | $n_2$ |

Des relations :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0,$$

on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \dfrac{d\alpha}{du} + \beta \dfrac{d\beta}{du} + \gamma \dfrac{d\gamma}{du} = 0, \\ \left(\alpha_1 \dfrac{d\alpha}{du} + \beta_1 \dfrac{d\beta}{du} + \gamma_1 \dfrac{d\gamma}{du}\right) + \left(\alpha \dfrac{d\alpha_1}{du} + \beta \dfrac{d\beta_1}{du} + \gamma \dfrac{d\gamma_1}{du}\right) = 0, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire :

$$l = 0, \qquad m + l_1 = 0.$$

On démontre de même que :

$$m_1 = 0, \qquad n_2 = 0, \qquad n + l_2 = 0, \qquad n_1 + m_2 = 0.$$

Le tableau (T) est donc un tableau *symétrique gauche.*

### § 4. — *Courbure en un point d'une courbe gauche Valeur absolue et signe*

Soient :

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s),$$

les équations de la courbe gauche $\Gamma$, lorsqu'on prend pour variable indépendante l'abscisse curviligne ($s$) du point M ($x$, $y$, $z$).

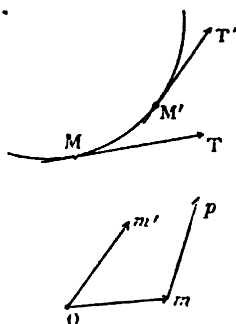



Fig. 15.

Soient : 1° M et M' deux points de la courbe $\Gamma$ (*fig.* 15);
2° O$m$, O$m'$, les segments directeurs des tangentes MT, M'T' ;
3° $\varepsilon$ l'angle de ces deux directions.
On appelle *courbure moyenne* de l'arc MM' le rapport :

$$\frac{\varepsilon}{\text{arc MM}'} = \text{courbure moyenne.}$$

La limite de ce rapport, quand M′ tend vers M, est ce qu'on appelle la valeur absolue de la *courbure au point* M. Remarquons que :

$$\text{corde } mm' = 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \qquad \lim \frac{\text{corde } mm'}{\varepsilon} = 1.$$

Donc la courbure en M est égale en valeur absolue à la limite du rapport :

$$\frac{\text{corde } mm'}{\text{arc MM}'}.$$

On voit donc que la courbure au point M est égale en valeur absolue à la dérivée géométrique $mp$ du segment O$m$, prise par rapport à $s$. Il est naturel d'appeler *valeur algébrique* de la courbure au point M la valeur algébrique du segment $mp$. On peut donc dire :

« La courbure en M est représentée par la dérivée géométrique du « segment directeur de la tangente en M, cette dérivée étant prise par « rapport à $s$. »

D'après (§ 2) la ligne d'action du segment ($mp$) est parallèle à la normale principale en M; en outre, sa valeur algébrique $\frac{1}{R}$ est donnée (§ 3) par:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds},$$

$\sigma$ désignant l'abscisse curviligne du point $m$. Les projections sur les axes du segment $mp$ sont :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Donc on a aussi :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

Remarques. — 1° Si on choisit pour direction positive de l'indicatrice sphérique le sens dans lequel se déplace le point $m$, quand le point M se déplace dans le sens positif de Γ, l'expression de la courbure est positive.

2° Les formules qui donnent les cosinus directeurs de la normale principale en M peuvent maintenant prendre la forme :

$$\alpha_1 = R\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \beta_1 = R\frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \gamma_1 = R\frac{d^2z}{ds^2}.$$

3° Enfin, si la variable indépendante qui fixe la position du point M sur la courbe Γ est une variable quelconque $t$, il faudra remarquer que :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{s'x'' - x's''}{s'^3},$$

et par suite :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

§ 5. — *Torsion en un point d'une courbe gauche. — Valeur absolue et signe*

Soient $Om$, $On_1$, $On_2$, les segments directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale au point M de la courbe Γ (*fig.* 16).

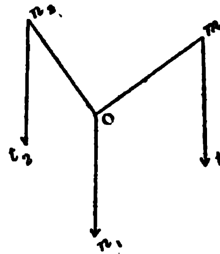


Fig. 16.

Soient $Om'$, $On'_1$, $On'_2$ les segments correspondants pour le point M'. Enfin, soit $\eta$ l'angle des directions $On_2$ et $On'_2$. On appelle *torsion moyenne* de l'arc MM' le rapport :

$$\frac{\eta}{\text{arc MM}'} = \text{torsion moyenne.}$$

La limite de ce rapport, lorsque M' tend vers M, est par définition la valeur absolue de la *torsion au point* M. Comme précédemment, cette limite est la même que celle du rapport :

$$\frac{\text{corde } n_2 n'_2}{\text{arc MM}'}.$$

Donc la torsion au point M est égale en valeur absolue à la *dérivée géométrique* du segment $On_2$, prise par rapport à $s$. La valeur algé-

brique de cette dérivée est par définition la *valeur algébrique* $\frac{1}{T}$ de la torsion au point M.

Ainsi:

« La torsion au point M est représentée par la dérivée géométrique « du segment directeur de la binormale en M, cette dérivée étant prise « par rapport à $s$. »

Remarquons que le point $n_2$ a pour lieu géométrique, quand $s$ varie, la courbe polaire de l'indicatrice; donc, en vertu d'un théorème élémentaire, la tangente au point $n_2$ est parallèle à la tangente en $m$ à l'indicatrice. Nous supposerons la direction des arcs de la courbe polaire choisie de manière que ces deux tangentes aient la même direction positive.

Ceci posé, si $\gamma$ désigne l'abscisse curviligne de $n_2$:

$$\frac{1}{T} = \frac{d\tau}{ds},$$

et:

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha_2}{d\tau}, \qquad \beta_1 = \frac{d\beta_2}{d\tau}, \qquad \gamma_1 = \frac{d\gamma_2}{d\tau}.$$

Par suite :

$$d\tau = \alpha_1 d\alpha_2 + \beta_1 d\beta_2 + \gamma_1 d\gamma_2,$$

ou bien :

$$d\tau = -\alpha_2 d\alpha_1 - \beta_2 d\beta_1 - \gamma_2 d\gamma_1,$$

ou encore, en tenant compte des expressions de $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ :

$$\frac{1}{T} = \frac{d\tau}{ds} = - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \frac{d\alpha_1}{ds} & \frac{d\beta_1}{ds} & \frac{d\gamma_1}{ds} \end{vmatrix}$$

D'autre part :

$$\alpha_1 = R\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \beta_1 = R\frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \gamma_1 = R\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Donc :

$$(1) \qquad \frac{1}{T} = -R^2 \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds_2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}$$

REMARQUE. — La torsion en chaque point d'une courbe plane est évidemment nulle; nous allons montrer que la réciproque est vraie. En effet, de:

$$\frac{d\tau}{ds} = 0$$

on déduit que le rayon $On_2$ reste fixe quand $m$ décrit l'indicatrice; donc cette dernière est un grand cercle, dont le plan est perpendiculaire à $On_2$. Par suite, les tangentes de $\Gamma$ sont toutes parallèles à un même plan, et la courbe $\Gamma$ est plane. Ce résultat est aussi une conséquence de la formule (1) et d'une proposition déjà démontrée (V. I, chap. I, § 2).

## § 6. — *Cercle osculateur*

Soient M et M' deux points de la courbe $\Gamma$ et MT la tangente en M. Construisons le cercle (C') tangent en M à la droite MT et passant par M'. Lorsque le point M' tend vers M, ce cercle a une limite déterminée, qu'on appelle le *cercle osculateur* en M.

Pour trouver cette limite, marquons sur la normale principale en M

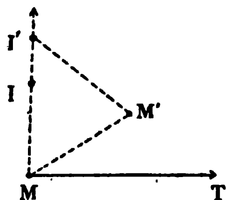



FIG. 17.

le point I' situé à égale distance de M et M' (*fig.* 17). Le cercle C' peut être considéré comme l'intersection de la sphère ayant pour centre I' et pour rayon I'M, avec le plan TMM'. Ce plan a une limite déterminée, qui est le plan osculateur en M. Nous allons voir que la sphère a également une limite bien déterminée.

Désignons par $\rho$ la valeur algébrique du segment MI'. Soient:

$$\text{(M)} \quad x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s),$$
$$\text{(M')} \quad X = f(s+\varepsilon), \qquad Y = g(s+\varepsilon), \qquad Z = h(s+\varepsilon),$$

les coordonnées de M et M'. — On a :

$$\rho^2 = (X - x - \rho\alpha_1)^2 + (Y - y - \rho\beta_1)^2 + (Z - z - \rho\gamma_1)^2,$$

d'où :

$$2\rho = \frac{\Sigma (X - x)^2}{\Sigma \alpha_1 (X - x)}.$$

Or, le développement en séries donne :

$$X - x = \frac{\varepsilon}{1} x' + \frac{\varepsilon^2}{1.2} x'' + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} x''' + \ldots$$

et deux formules analogues pour $Y - y$ et $Z - z$. D'où :

$$(1)\quad \lim \frac{X - x}{\varepsilon} = x', \quad \lim \Sigma \left(\frac{X - x}{\varepsilon}\right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

D'autre part :

$$\alpha_1 = Rx'', \qquad \beta_1 = Ry'', \qquad \gamma_1 = Rz'',$$

$$\alpha_1 (X - x) + \beta_1 (Y - y) + \gamma_1 (Z - z) = \frac{\varepsilon^2}{1,2} (\alpha_1 x'' + \beta_1 y'' + \gamma_1 z'') + \ldots$$

ou :

$$\Sigma \alpha_1 (X - x) = \frac{\varepsilon^2}{2R} + \ldots$$

Donc :

$$(2)\qquad \lim \frac{\Sigma \alpha_1 (X - x)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2R}.$$

Les formules (1) et (2) donnent :

$$\lim \rho = R.$$

Le point I' a donc une limite bien déterminée, à savoir le point I, dont les coordonnées $(a, b, c)$ sont définies par :

$$a = x + R\alpha_1, \qquad b = y + R\beta_1, \qquad c = z + R\gamma_1.$$

Ce point est appelé le *centre de courbure* au point M.

On voit donc que le cercle C' a une position limite C bien déterminée. Le cercle C est situé dans le plan osculateur en M, a pour centre le point I et pour rayon IM. Ce cercle est aussi appelé le *cercle de courbure* au point M.

## § 7. — *Formules de Serret*

Ces formules ont pour but de faire connaître les dérivés des neuf cosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, en fonction de ces cosinus et de R et T. On peut les obtenir très rapidement par le procédé suivant :

Soient MT, $MN_1$, $MN_2$, les droites que nous avons si souvent considérées, et qui constituent ce que l'on peut appeler le trièdre de Serret,

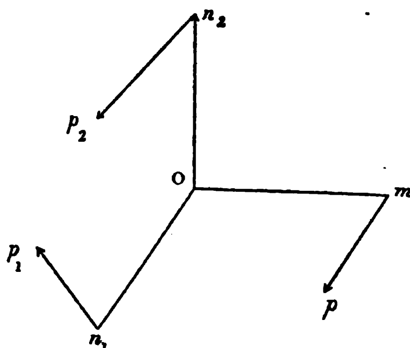



Fig. 18.

relatif au point M (*fig.* 18). Soient (O$m$), (O$n_1$), (O$n_2$), les segments directeurs de ces trois droites, et ($mp$), ($n_1p_1$), ($n_2p_2$), leurs dérivées géométriques. On a vu que $mp$ représente la courbure au point M, que $n_2p_2$ représente la torsion, et que la ligne d'application de ces segments est parallèle à O$n_1$. L'application du théorème relatif aux dérivées de trois segments rectangulaires (§ 3) montre que les projections des trois segments $mp$, $n_1p_1$ et $n_2p_2$ sur les arêtes du trièdre (O$m$, O$n_1$, O$n_2$) sont indiquées par le tableau suivant :

| | $mp$ | $n_1p_1$ | $n_2p_2$ |
|---|---|---|---|
| O$m$ | 0 | $-\frac{1}{R}$ | 0 |
| O$n_1$ | $\frac{1}{R}$ | 0 | $\frac{1}{T}$ |
| O$n_2$ | 0 | $-\frac{1}{T}$ | 0 |

En projetant ces trois segments sur les axes fixes, on obtient (§ 3) :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{d\alpha}{ds}=\dfrac{\alpha_1}{R}, & \dfrac{d\beta}{ds}=\dfrac{\beta_1}{R}, & \dfrac{d\gamma}{ds}=\dfrac{\gamma_1}{R}, \\
\dfrac{d\alpha_2}{ds}=\dfrac{\alpha_1}{T}, & \dfrac{d\beta_2}{ds}=\dfrac{\beta_1}{T}, & \dfrac{d\gamma_2}{ds}=\dfrac{\gamma_1}{T}, \\
\dfrac{d\alpha_1}{ds}=-\dfrac{\alpha}{R}-\dfrac{\alpha_2}{T}, & \dfrac{d\beta_1}{ds}=-\dfrac{\beta}{R}-\dfrac{\beta_2}{T}, & \dfrac{d\gamma_1}{ds}=-\dfrac{\gamma}{R}-\dfrac{\gamma_2}{T}.
\end{array}\right.$$

Telles sont les formules de Serret.

Remarque. — Il est aisé de voir que $\dfrac{d^n\alpha}{ds^n}$ est une forme linéaire de $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ayant pour coefficients des fonctions de R et T et de leurs dérivées. Pour l'établir, il suffit de faire voir que, si la proposition est vraie pour l'indice $n$, elle l'est aussi pour l'indice $(n+1)$. Soit :

$$\frac{d^n\alpha}{ds^n}=A\alpha+B\alpha_1+C\alpha_2,$$

alors :

$$\frac{d^{n+1}\alpha}{ds^{n+1}}=A_1\alpha+B_1\alpha_1+C_1\alpha_2,$$

où :

$$A_1=\frac{dA}{ds}-\frac{B}{R}, \qquad B_1=\frac{dB}{ds}+\frac{A}{R}+\frac{C}{T}, \qquad C_1=\frac{dC}{ds}-\frac{B}{T}.$$

La proposition est donc démontrée.

On trouve de même :

$$\frac{d^n\beta}{ds^n}=A\beta+B\beta_1+C\beta_2,$$

$$\frac{d^n\gamma}{ds^n}=A\gamma+B\gamma_1+C\gamma_2$$

§ 8. — *Développement des coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point* M *suivant les puissances croissantes de l'abscisse curviligne* ($s$) *de ce point*

Prenons pour axes de coordonnées les arêtes du trièdre de Serret, relatif à l'origine des arcs de la courbe Γ, et supposons connues les expressions de la courbure et de la torsion en un point quelconque M en fonction de l'abscisse curviligne ($s$) de ce point:

$$R=\varphi(s), \qquad T=\psi(s).$$

Nous allons voir que l'on peut calculer les coefficients des développements, déjà rencontrés :

$$(1)\quad x = x_1 s + x_2 s^2 + \dots \quad y = y_1 s + y_2 s^2 + \dots, \quad z = z_1 s + z_2 s^2 + \dots$$

En effet, il résulte des relations :

$$(2)\qquad \frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \beta, \qquad \frac{dz}{ds} = \gamma$$

et de la proposition que nous venons d'établir que :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^n x}{ds^n} = A_n\alpha + B_n\alpha_1 + C_n\alpha_2, \\ \dfrac{d^n y}{ds^n} = A_n\beta + B_n\beta_1 + C_n\beta_2, \\ \dfrac{d^n z}{ds^n} = A_n\gamma + B_n\gamma_1 + C_n\gamma_2, \end{cases}$$

avec :

$$(4)\ A_n = \frac{dA_{n-1}}{ds} - \frac{B_{n-1}}{R}, \ B_n = \frac{dB_{n-1}}{ds} + \frac{A_{n-1}}{R} + \frac{C_{n-1}}{T}, \ C_n = \frac{dC_{n-1}}{ds} - \frac{B_{n-1}}{T}.$$

En faisant dans ces formules :

$$s = o,$$

et successivement :

$$n = 1, 2, 3\dots$$

on obtiendra les expressions de $x_n$, $y_n$, $z_n$ :

$$a_n = 1.\ 2.\ 3\dots n\left(\frac{d^n a}{ds^n}\right)_0, \ a = x, y, z.$$

On remarquera qu'à l'origine :

$$\alpha = \beta_1 = \gamma_2 = 1,$$

et que tous les autres cosinus $\beta$, $\gamma$, $\alpha_1$, $\gamma_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, sont nuls.

Calculons les premiers coefficients des développements. Les formules (1) donnent :

$$A_1 = 1, \qquad B_1 = o, \qquad C_1 = o;$$

les formules (4) donnent ensuite :

$$A_2 = 0, \qquad B_2 = \frac{1}{R}, \qquad C_2 = 0,$$

$$A_3 = -\frac{1}{R^2}, \qquad B_3 = -\frac{R'}{R^2}, \qquad C_3 = -\frac{1}{RT}, \qquad R' = \frac{dR}{ds};$$

de là, on déduit immédiatement :

$$\left\{\begin{array}{l} x = s \qquad - \dfrac{s^3}{6R_0^2} s^3 \quad + \ldots \\ y = \dfrac{s^2}{2R_0} - \dfrac{R'_0}{6R_0^2} s^3 \quad + \ldots \\ z = \qquad - \dfrac{1}{6R_0 T_0} s^3 \quad + \ldots \end{array}\right.$$

Remarque. — Si on a égard à ces formules et à l'indétermination de la direction des axes, on voit que : « la courbe Γ et sa symétrique « sont les seules, pour lesquelles R et T ont les expressions données. »

## § 9. — *Cas où la ligne donnée* Γ *est plane*

Les formules et notions qui précèdent se simplifient particulièrement, quand la courbe Γ est plane. Nous allons les passer en revue.

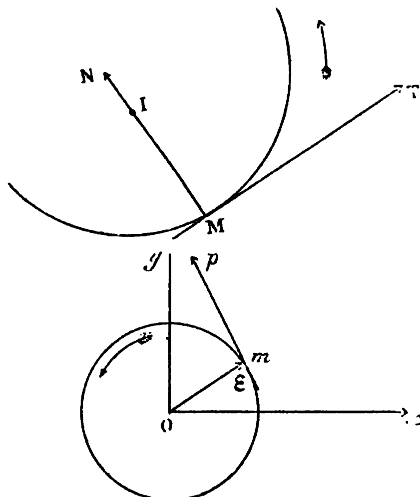



Fig. 19.

Soient : M un point de la courbe; $s$, son abscisse curviligne; $x$ et $y$

ses coordonnées rectangulaires, et enfin (*fig.* 19) :

$$\varepsilon = \widehat{x, T}.$$

Les cosinus directeurs $(\alpha, \beta)$ de la tangente MT sont :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \cos\varepsilon = \frac{dx}{ds}, \\ \beta &= \sin\varepsilon = \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \right.$$

Les plans osculateurs de la courbe se confondent avec le plan *xoy*.

L'indicatrice de la courbe Γ, c'est-à-dire le lieu de l'extrémité *m* du segment directeur de la tangente MT, se confond avec le cercle trigonométrique ayant O pour centre. Le choix du sens positif de ce cercle est indépendant de la courbe Γ ; on voit donc qu'il y a avantage, dans la théorie générale (§ 2, nº 2), à ne pas faire dépendre du sens de la courbe Γ celui de l'indicatrice sphérique.

La direction positive MN de la normale (principale) en M est celle de la tangente en *m* ; elle est donc définie par :

$$(\widehat{T, N}) = +\frac{\pi}{2}, \qquad \text{ou :} \qquad (\widehat{x, N}) = \varepsilon + \frac{\pi}{2}.$$

Les cosinus directeurs $(\alpha_1, \beta_1)$ de MN sont donc :

$$(2) \qquad \alpha_1 = -\sin\varepsilon, \qquad \beta_1 = \cos\varepsilon.$$

La courbure au point M est représentée par le segment *mp*, dérivée géométrique du segment O*m* par rapport à *s*. Cette courbure a donc pour valeur algébrique :

$$(3) \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

Remarquons que :

$$d\varepsilon = \alpha d\beta - \beta d\alpha :$$

la formule (3) donne donc :

$$(4) \qquad \frac{1}{R} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Supposons $x$ et $y$ évaluées, non en fonction de $s$, mais en fonction

d'une variable indépendante quelconque $t$; alors la formule (4) prend la forme :

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{s'^3}, \tag{5}$$

où les lettres accentuées désignent des dérivées prises par rapport à $t$.

La formule (5) est, comme on voit, beaucoup plus simple que la formule correspondante dans la théorie des courbes gauches.

Le centre du cercle osculateur, ou centre de courbure en M, est en un point I de la normale, tel que (V. § 6) :

$$MI = R.$$

Ses coordonnées $(x_1, y_1)$ sont donc :

$$x_1 = x - R\sin\varepsilon, \qquad y_1 = y + R\cos\varepsilon. \tag{6}$$

On vérifie aisément au moyen de ces formules que le point I est le point de contact de MN avec son enveloppe.

Si on différencie les expressions (1) et (2), on obtient immédiatement les formules :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\alpha_1}{R}, \\ \frac{d\alpha_1}{ds} &= -\frac{\alpha}{R}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\beta_1}{R}, \\ \frac{d\beta_1}{ds} &= -\frac{\beta}{R}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

que l'on peut aussi déduire des formules de Serret, en supposant la torsion nulle. Nous avons vu, en effet (§ 5), qu'en chaque point d'une courbe plane la torsion est nulle, et réciproquement.

Enfin, si l'on rapporte la courbe aux axes MT et MN, on trouve (§ 8) :

$$\left\{\begin{aligned} x &= s - \frac{s^3}{6R^2} + \cdots \\ y &= \frac{s^2}{2R} + \cdots \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Ces formules montrent que le centre de courbure I est du même côté que la courbe par rapport à la tangente MT, du moins dans le voisinage du point M.

Remarque. — Revenons aux anciens axes O$x$ et O$y$ et supposons les coordonnées $x$ et $y$ de M évaluées en fonction d'une variable quelconque $t$. Prenons pour sens positif de la tangente en M le sens des

*croissants ;* alors dans la formule (5) :

$$s' > 0,$$

et le signe de R est celui de : $(x'y'' - y'x'')$.

Donc, si :

$$x'y'' - y'x'' > 0,$$

la courbe est *concave* au point M vers la normale positive ; elle est *convexe* dans le cas contraire.

## CHAPITRE II

## APPLICATIONS DES FORMULES FONDAMENTALES
## FORMULES RELATIVES A LA VARIATION D'UN SEGMENT

§ 1. — Problème I. — Déterminer les courbes gauches pour lesquelles la courbure est constante, ainsi que la torsion.

Soient :

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s),$$

les équations d'une courbe $\Gamma$, pour laquelle :

$$R = C^{te}. \qquad T = C^{te}.$$

Prenons pour inconnues auxiliaires les cosinus du trièdre de Serret relatif à un point quelconque M de la courbe. — Les cosinus $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ (nous conservons ici les notations du chapitre précédent) sont liés par les relations :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}, \qquad \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{T}$$

De là on déduit, en éliminant $\alpha$ et $\alpha_2$ :

$$\frac{d^2\alpha_1}{ds^2} = -\frac{\alpha_1}{K^2}, \qquad \text{avec :} \qquad \frac{1}{K^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}.$$

Donc $\alpha_1$ est une intégrale de l'équation :

$$\frac{d^2u}{ds^2} = -\frac{u}{K^2}.$$

Il en est de même de $\beta_1$ et $\gamma_1$. — Donc :

$$\alpha_1 = A\cos\frac{s}{K} + B\sin\frac{s}{K} = R\frac{d\alpha}{ds},$$

$$\beta_1 = A'\cos\frac{s}{K} + B'\sin\frac{s}{K} = R\frac{d\beta}{ds},$$

$$\gamma_1 = A''\cos\frac{s}{K} + B''\sin\frac{s}{K} = R\frac{d\gamma}{ds}.$$

Comme on a identiquement :

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1,$$

on doit avoir :

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = B^2 + B'^2 + B''^2 = 1,$$
$$AB + A'B' + A''B'' = 0.$$

Les cosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sont par suite donnés par :

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{AK}{R}\sin\dfrac{s}{K} - \dfrac{BK}{R}\cos\dfrac{s}{K} + \dfrac{CK}{T}, \\ \beta = \dfrac{A'K}{R}\sin\dfrac{s}{K} - \dfrac{B'K}{R}\cos\dfrac{s}{K} + \dfrac{C'K}{T}, \\ \gamma = \dfrac{A''K}{R}\sin\dfrac{s}{K} - \dfrac{B''K}{R}\cos\dfrac{s}{K} + \dfrac{C''K}{T}, \end{cases}$$

où les constantes C, C′, C″ sont assujetties à satisfaire aux relations :

$$AC + A'C' + A''C'' = BC + B'C' + B''C'' = 0,$$
$$C^2 + C'^2 + C''^2 = 1.$$

Les cosinus du trièdre de Serret sont déterminés. Les équations (1) fournissent immédiatement $x$, $y$, $z$, puisque :

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \beta, \qquad \frac{dz}{ds} = \gamma.$$

En désignant par $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$, les neuf cosinus d'un trièdre fixe :

$$(2)\quad \begin{cases} x = x_0 + ax_1 + by_1 + cz_1, \\ y = y_0 + a'x_1 + b'y_1 + c'z_1, \\ z = z_0 + a''x_1 + b''y_1 + c''z_1, \end{cases}$$

avec :

$$(3) \qquad x_1 = \frac{K^2}{R}\cos\frac{s}{K}, \qquad y_1 = \frac{K^2}{R}\sin\frac{s}{K}, \qquad z_1 = \frac{K}{T}s.$$

Les équations (2) de la courbe Γ montrent que, par un déplacement convenable de cette courbe, on peut la faire coïncider avec l'hélice définie par les équations (3).

Ainsi : « Une courbe pour laquelle la courbure est constante ainsi que la torsion est une hélice tracée sur un cylindre de révolution. »

Si on pose :

$$\frac{s}{K} = \omega,$$

on voit que les équations (3) prennent la forme :

$$x_1 = \frac{K^2}{R}\cos\omega, \quad y_1 = \frac{K^2}{R}\sin\omega, \quad z_1 = \frac{K^2}{T}\omega, \quad \frac{1}{K^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}.$$

Remarque. — Si R et T ne sont pas constants, mais si :

$$\frac{R}{T} = C^{te},$$

la courbe Γ est encore une hélice, mais cette hélice n'est plus tracée sur un cylindre de révolution. Cette proposition, due à M. Bertrand, est une conséquence immédiate des formules de Serret ; je laisse au lecteur le soin de le vérifier. Nous serons plus loin conduits tout naturellement à ce théorème.

Problème II. — Déterminer les courbes planes pour lesquelles la

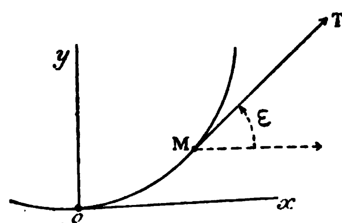



Fig. 20.

courbure en chaque point M est une fonction donnée de l'abscisse curviligne $s$ de ce point :

$$\frac{1}{R} = \varphi(s).$$

Soit Γ une courbe satisfaisant à la question (*fig.* 20). Prenons pour

axe des $x$ la tangente à l'origine ($o$) des arcs de la courbe $\Gamma$, pour axe des $y$ la normale en ce point. Cherchons d'abord l'angle $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \widehat{x, T}.$$

On a vu que :

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{R} = \varphi(s);$$

donc, par suite du choix particulier des axes :

$$\varepsilon = \int_0^s \varphi(s)\, ds.$$

Ceci posé, les coordonnées $x$ et $y$ du point M sont déterminées en fonction de $s$ par les formules :

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varepsilon, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varepsilon;$$

d'où l'on tire :

$$x = \int_0^s \cos\varepsilon ds, \qquad y = \int_0^s \sin\varepsilon ds.$$

On voit que la forme de la courbe est complètement déterminée. Cette proposition est, d'ailleurs, un cas particulier d'un théorème établi plus haut (chap. Ier, § 8).

### § 2. — *Formules relatives à la variation d'un segment* (1er groupe)

Soient : $u$ la valeur algébrique d'un segment $MM_1$, ayant pour ligne d'application la droite D (*fig.* 21);

$a$, $b$, $c$, les projections sur les axes du segment directeur O$d$ de la droite D ;

$x$, $y$, $z$, les coordonnées du point M.

Nous supposons que ces sept quantités sont fonctions d'une même variable indépendante ($t$) ; le mouvement des points (M, $M_1$, $d$) est alors complètement déterminé. Désignons les trajectoires de ces points res-

pectivement par S, $S_1$ et $\Sigma$, et les directions positives des tangentes en

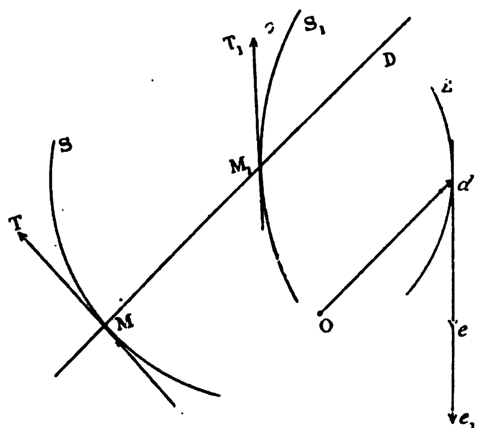



Fig. 21.

M, $M_1$, $d$, par MT, $M_1T_1$ et $de$. Enfin, posons :

$$\theta = \widehat{Od, MT}, \qquad \theta_1 = \widehat{Od, M_1T_1},$$

$$\varepsilon = \widehat{de, MT}, \qquad \varepsilon_1 = \widehat{de, M_1T_1}.$$

Ceci posé, les coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$, du point $M_1$ sont définies par :

$$x_1 = x + au, \qquad y_1 = y + bu, \qquad z_1 = z + cu.$$

De là on déduit en différentiant

$$(1) \qquad \begin{cases} dx_1 = dx + adu + uda, \\ dy_1 = dy + bdu + udb, \\ dz_1 = dz + cdu + udc. \end{cases}$$

L'interprétation de ces formules conduit à des propriétés infinitésimales curieuses du mouvement considéré. En effet, résolvons les équations (1) par rapport à $du$ et $u$ :

$$(2) \qquad \begin{cases} du = \Sigma adx_1 - \Sigma adx, \\ a\,(da^2 + db^2 + dc^2) = \Sigma dadx_1 - \Sigma dadx. \end{cases}$$

Soient $s$, $s_1$ et $\sigma$ les abscisses curvilignes respectives des points M, $M_1$ et $d$. Les formules (2) donnent :

$$\left\{\begin{aligned} du &= ds_1 \Sigma a \frac{dx_1}{ds_1} - ds \Sigma a \frac{dx}{ds}, \\ ud\sigma &= ds_1 \Sigma \frac{da}{d\sigma} \cdot \frac{dx_1}{ds_1} - ds \Sigma \frac{da}{d\sigma} \frac{dx}{ds}, \end{aligned}\right.$$

ou bien :

$$du = ds_1 \cos \theta_1 - ds \cos \theta, \qquad \text{(I)}$$
$$ud\sigma = ds_1 \cos \varepsilon_1 - ds \cos \varepsilon. \qquad \text{(II)}$$

Ces deux formules jouent, comme on le verra, un rôle important dans beaucoup de questions relatives au déplacement d'un système de deux points. La première est, d'ailleurs, bien connue.

Enfin, l'élimination de $u$ et $du$ entre les équations (1) conduit à la relation :

$$I ds^2 = I_1 ds_1^2, \qquad \text{(III)}$$

où :

$$\text{(3)} \qquad I = \begin{vmatrix} a & \frac{da}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ b & \frac{db}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ c & \frac{dc}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} \qquad I_1 = \begin{vmatrix} a & \frac{da}{ds_1} & \frac{dx_1}{ds_1} \\ b & \frac{db}{ds_1} & \frac{dy_1}{ds_1} \\ c & \frac{dc}{ds_1} & \frac{dz_1}{ds_1} \end{vmatrix}$$

Comme les relations (I) et (II), la relation (III) exprime une propriété indépendante des axes de coordonnées.

Pour le faire voir, désignons par :

$\lambda$, $\mu$, $\nu$, les projections, sur les axes de Serret relatifs au point M, du segment directeur O$d$;

A, B, C, les projections, sur les axes de Serret relatifs au point M, du segment ($de$) dérivée géométrique du segment O$d$ par rapport à $s$.

Alors :

$$\text{(4)} \qquad \left\{\begin{aligned} a &= \lambda\alpha + \mu\alpha_1 + \nu\alpha_2, & \frac{da}{ds} &= A\alpha + B\alpha_1 + C\alpha_2, & \frac{dx}{ds} &= \alpha, \\ b &= \lambda\beta + \mu\beta_1 + \nu\beta_2, & \frac{db}{ds} &= A\beta + B\beta_1 + C\beta_2, & \frac{dy}{ds} &= \beta, \\ c &= \lambda\gamma + \mu\gamma_1 + \nu\gamma_2, & \frac{dc}{ds} &= A\gamma + B\gamma_1 + C\gamma_2, & \frac{dz}{ds} &= \gamma, \end{aligned}\right.$$

et par suite :

$$I = \begin{vmatrix} \lambda & A & 1 \\ \mu & B & 0 \\ \nu & C & 0 \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{Vmatrix} = C\mu - B\nu.$$

Cette formule montre que I est indépendant du choix des axes $Ox$, $Oy$, $Oz$.

De même, soient :

$\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$, les projections sur les axes de Serret, relatifs au point $M_1$, du segment $Od$ ;

$A_1$, $B_1$, $C_1$, les projections sur les axes de Serret, relatifs au point $M_1$ de la dérivée géométrique $de_1$ du segment $Od$, prise par rapport à $s_1$.

On trouve :

$$I_1 = C_1\mu_1 - B_1\nu_1.$$

Les formules I, II, III, quand on introduit les quantités $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $A_1$, $B_1$, $C$, $\lambda_1$,... deviennent :

$$\begin{gathered} du = \lambda_1 ds_1 - \lambda ds, \\ u d\sigma^2 = A_1 {ds_1}^2 - A ds^2, \\ (C\mu - B\nu)\, ds^2 = (C_1\mu_1 - B_1\nu_1)\, {ds_1}^2. \end{gathered}$$

La deuxième formule résulte de ce fait que :

$$\frac{d\sigma}{ds}\cos\varepsilon = A, \quad \frac{d\sigma}{ds_1}\cos\varepsilon_1 = A_1.$$

Remarque I. — Évaluons A, B, C, au moyen de $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Si on différentie les formules (4), qui donnent les expressions de $a$, $b$, $c$, en fonction de $\lambda$, $\mu$, $\nu$, et si on tient compte des formules de Serret, on trouve les formules suivantes, dont nous ferons un grand usage :

$$\begin{aligned} A &= \frac{d\lambda}{ds} - \frac{\mu}{R}, \\ B &= \frac{d\mu}{ds} + \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T}, \\ C &= \frac{d\nu}{ds} - \frac{\mu}{T}, \\ A\lambda &+ B\mu + C\nu = 0. \end{aligned}$$

REMARQUE II. — L'expression différentielle $\mathrm{I}ds^2$ a une signification géométrique simple que je ne fais qu'indiquer. Soit M'D' la position de la droite MD (*fig.* 22), correspondant à un accroissement $ds$ de l'abscisse curviligne $s$ du point M. Soit M'P' un segment équipollent au segment

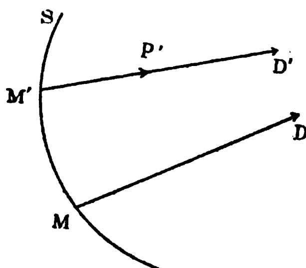



FIG. 22.

directeur de la droite D'. Si on prend $ds$ pour infiniment petit principal, le moment du segment M'P' par rapport à la droite D a pour terme principal $\mathrm{I}ds^2$. N'ayant pas à utiliser cette proposition, je laisse au lecteur le soin de la démontrer. On utilisera à cet effet la formule (3). La signification de $\mathrm{I}_1 ds_1{}^2$ est analogue.

§ 3. — *Formules relatives à la variation d'un segment* (2e groupe)

Soient H et $\mathrm{H}_1$ les valeurs algébriques respectives des segments $de$ et $de_1$ ; les deux expressions de $d\sigma$ :

$$d\sigma = \mathrm{H}ds, \qquad d\sigma = \mathrm{H}_1 ds_1,$$

montrent que:

$$\mathrm{H}ds = \mathrm{H}_1 ds_1. \qquad \text{(IV)}$$

D'ailleurs:

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2, \qquad \mathrm{H}_1{}^2 = \mathrm{A}_1{}^2 + \mathrm{B}_1{}^2 + \mathrm{C}_1{}^2.$$

On peut dire que les expressions $\mathrm{I}ds^2$ et $\mathrm{H}ds$ sont *invariantes*, quand on passe du mouvement du point M à celui de $\mathrm{M}_1$. — On peut trouver un *invariant différentiel* nouveau par les considérations suivantes.

Posons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{da}{ds} & \dfrac{db}{ds} & \dfrac{dc}{ds} \\ \dfrac{d^2a}{ds^2} & \dfrac{d^2b}{ds^2} & \dfrac{d^2c}{ds^2} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{da}{ds_1} & \dfrac{db}{ds_1} & \dfrac{dc}{ds_1} \\ \dfrac{d^2a}{ds_1^2} & \dfrac{d^2b}{ds_1^2} & \dfrac{d^2c}{ds_1^2} \end{vmatrix}$$

il est aisé de voir que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ da & db & dc \\ d^2a & d^2b & d^2c \end{vmatrix}$$

est égal à chacune des expressions $\Delta\, ds^3$ et $\Delta_1\, ds_1^3$, donc :

$$\Delta\, ds^3 = \Delta_1\, ds_1^3.$$

Nous allons montrer que ces quantités $\Delta$ et $\Delta_1$ ne dépendent pas du choix des axes de coordonnées rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$.

Calculons $\Delta$ au moyen de $\lambda$, $\mu$, $\nu$. A cet effet, remarquons que les formules (4) du paragraphe précédent et les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2a}{ds^2} &= A'\alpha + B'\alpha_1 + C'\alpha_2, \\ \frac{d^2b}{ds^2} &= A'\beta + B'\beta_1 + C'\beta_2, \\ \frac{d^2c}{ds^2} &= A'\gamma + B'\gamma + C'\gamma_2, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} A' &= \frac{dA}{ds} - \frac{B}{R}, \\ B' &= \frac{dB}{ds} + \frac{A}{R} + \frac{C}{T}, \\ C' &= \frac{dC}{ds} - \frac{B}{T}, \end{aligned}\right.$$

montrent que :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} \quad \text{de même :} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \end{vmatrix}$$

En résumé, nous avons obtenu les deux groupes de formules :

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & du = \lambda_1 ds_1 - \lambda ds, \\ \text{(II)} & u\,d\sigma^2 = A_1 ds_1^2 - A ds^2, \\ \text{(III)} & (C\mu - B\nu)\, ds^2 = (C_1\mu_1 - B\nu_1)\, ds_1^2, \\ \text{(IV)} & d\sigma = H ds = H_1 ds_1, \\ \text{(V)} & \Delta ds^3 = \Delta_1 ds_1^3, \end{array}$$

$$H^2 = A^2 + B^2 = C^2, \qquad H_1^2 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2.$$

Remarquons que la formule (II) peut aussi prendre la forme :

$$\text{(II bis)} \qquad u = \frac{A_1}{H_1^2} - \frac{A}{H^2}.$$

Toutes ces formules nous paraissent fondamentales.

**Remarques.** — 1° Examinons dans quel cas l'un des invariants $Hds$, $Ids^2$, $\Delta ds^3$ est nul. Si :

$$H = 0,$$

il est clair que la droite D reste parallèle à une direction fixe (car $d\sigma = 0$).

Si :

$$\Delta = 0,$$

la droite D reste parallèle à un plan (V. I, chap. Ier, § 2).

Enfin, l'expression de I (chap. II, § 2) montre que, si :

$$I = 0,$$

la droite D engendre une surface développable. Il est évident, d'ailleurs, que les réciproques de ces propositions sont exactes.

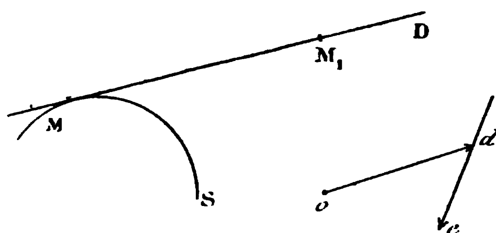



Fig. 23.

2° Si, dans toutes ses positions, la droite D est constamment tangente à la trajectoire S du point M (*fig.* 23), on a évidemment :

$$\cos \varepsilon = 0, \qquad A = 0.$$

Mais il faut observer que la réciproque n'est pas vraie.

Si A est nul, la droite D n'engendre pas forcément une surface développable. Nous verrons plus tard (surfaces réglées) la signification géométrique de la relation :

$$A = 0.$$

### § 4. — *Expression particulière du déterminant* $\Delta$

Multiplions le déterminant $\Delta$ par le suivant :

$$1 - \lambda^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -r \\ 0 & \nu & \mu \end{vmatrix}$$

Nous trouvons, en tenant compte des identités : $\begin{cases} A\lambda + B\mu + C\nu = o, \\ A'\lambda + B'\mu + C'\nu = - H^2. \end{cases}$

$$\Delta(1 - \lambda^2) = \begin{vmatrix} \lambda & A & A' \\ 1 - \lambda^2 & -A\lambda & -H^2 - A'\lambda \\ 0 & C\mu - B\nu & C'\mu - B'\nu \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire, en revenant à la notation :

$$I = C\mu - B\nu,$$
$$\Delta(1 - \lambda^2) = I(A' + \lambda H^2) - A(C'\mu - B'\nu).$$

D'autre part, les formules qui donnent A', B', C' (paragraphe précédent) montrent que :

$$A' = \frac{dA}{ds} - \frac{B}{R}, \qquad C'\mu - B'\nu = \frac{dI}{ds} + \frac{C\lambda - A\nu}{R}.$$

Par suite :

$$\Delta(1 - \lambda^2) = I\frac{dA}{ds} - A\frac{dI}{ds} + H^2\left(\frac{\nu}{R} + \lambda I\right).$$

Cette expression simplifiée de $\Delta$ peut être utile.

Remarques. — I. Si on a :

$$I = o,$$

c'est-à-dire si la surface est développable, la formule précédente se simplifie et donne :

$$\Delta = \frac{H^2}{1 - \lambda^2} \cdot \frac{\nu}{R}.$$

II. Supposons maintenant :

$$\lambda = 1, \qquad \mu = o, \qquad \nu = o;$$

les génératrices sont alors les tangentes de la directrice donnée. La transformation précédente n'est plus permise ; mais la simplication de $\Delta$ ne présente aucune difficulté.

On a en effet :

$$A = o, \qquad B = \frac{1}{R}, \qquad C = o, \qquad C' = -\frac{B}{T} = -\frac{1}{RT},$$

donc :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & o \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = \frac{C'}{R} = -\frac{1}{R^2T}.$$

§5. — *Cas particulier où le segment $MM_1$ se déplace dans le même plan*

Soit $Od$ le segment directeur de la ligne d'application du segment (*fig.* 24) ; le lieu du point ($d$) est précisément le cercle trigonométrique, et $\sigma$ est l'abscisse curviligne du point ($d$) sur ce cercle.

Posons :

$$\theta = \widehat{D, T}, \qquad \theta_1 = \widehat{D, T_1},$$

en désignant, comme plus haut, par D, T, $T_1$, les directions de la ligne

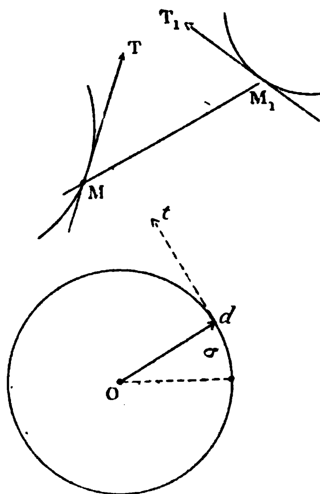



Fig. 24.

d'application du segment et des tangentes MT, $M_1T_1$. Soit $(t)$ la direction de la tangente au point $(d)$ ; posons aussi pour un instant :

$$\varepsilon = \widehat{t, T}, \qquad \varepsilon_1 = \widehat{t, T_1},$$

En vertu des formules (I) et (II), on a :

$$du = ds_1 \cos\theta_1 - ds \cos\theta,$$
$$ud\sigma = ds_1 \cos\varepsilon_1 - ds \cos\varepsilon ;$$

mais dans tous les cas :

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{2} + \theta, \qquad \varepsilon_1 = -\frac{\pi}{2} + \theta_1,$$

les formules précédentes deviennent :

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \left\{ \begin{array}{l} du = ds_1 \cos\theta_1 - ds \cos\theta, \\ ud\sigma = ds_1 \sin\theta_1 - ds \sin\theta. \end{array} \right. \\ \text{(II)} & \end{array}$$

Les formules III, IV, V, se réduisent ici aux formules évidentes :

$$d\sigma = \frac{ds}{R} = \frac{ds_1}{R_1}.$$

# QUATRIÈME PARTIE

# PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES SURFACES RÉGLÉES

## CHAPITRE I

## SURFACES GAUCHES

### § 1. — *Préliminaires*

Nous désignerons dans la suite par :

$\Gamma$ la directrice d'une surface réglée quelconque S (*fig.* 25) ;

MD, la génératrice passant par un point quelconque M de la directrice ;

O*d*, le segment directeur de MD ;

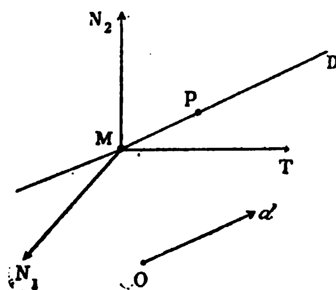



FIG. 25.

$\lambda$, $\mu$, $\nu$, les projections du segment O*d* sur les axes de Serret MT, $MN_1$, $MN_2$, relatifs au point M ;

*s*, l'abscisse curviligne du point M.

La surface S est complètement déterminée, si on donne la courbe $\Gamma$ ainsi que les expressions de $\lambda$, $\mu$, $\nu$ en fonction de ($s$) :

$$(1) \qquad \lambda = f(s), \qquad \mu = g(s), \qquad \nu = h(s).$$

Nous dirons que les équations (1) sont les équations *intrinsèques* de la surface S.

**Les coordonnées *superficielles* d'un point P de la surface situé sur la génératrice MD sont :**

**1° L'abscisse curviligne ($s$) du pied M de la génératrice ;**

**2° La valeur algébrique ($u$) du segment MP.**

**Le cône engendré par O$d$ est dit (comme on sait déjà) le cône *directeur* de la surface S.**

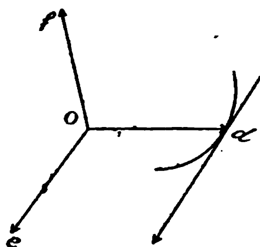


Fig. 26.

Nous désignerons par O$e$ (*fig.* 26) la direction de la tangente à la trajectoire du point $d$ et par O$f$ la direction de la perpendiculaire au plan $d$O$e$. Cette direction O$f$ est supposée choisie de manière que le trièdre (O$d$, O$e$, O$f$) ait la direction directe.

*Enfin, les notations employées dans l'étude de la variation d'un segment sont toutes conservées ici.*

## § 2. — *Point central. Ligne de striction*

Nous avons vu (IIe partie) qu'un plan $\Pi$ quelconque, passant par MD, est tangent à la surface S en un point et un seul. Parmi les plans $\Pi$, il y en a deux qui ont évidemment une situation bien particulière relativement au cône directeur, ce sont : le plan $\Pi_1$, perpendiculaire au plan $d$O$e$, ou parallèle au plan $d$O$f$, et le plan $\Pi_2$ parallèle au plan $d$O$e$. Le second a son point de contact rejeté à l'infini (IIe partie) ; le premier a son point de contact en un point de D qu'on appelle le *point central* de la génératrice D.

Ainsi, pour construire le point central de D, il suffit :

1° De construire le plan normal au cône directeur suivant la génératrice parallèle à D ;

2° De mener par la droite D un plan $\Pi_1$ parallèle à ce plan normal.

Le point de contact de $\Pi_1$ avec la surface S est le point central cherché.

Le lieu des points centraux est appelé la *ligne de striction* de la surface S.

Cherchons l'équation de cette ligne (en coordonnées superficielles). A cet effet, soit $M_1$ un point de D ; supposons que les coordonnées $u$ et $s$ de ce point soient liées par :

$$u = \psi(s).$$

Lorsque M décrit la courbe $\Gamma$, le point $M_1$ décrit une courbe $\Gamma_1$. Appliquons la formule fondamentale (III<sup>e</sup> partie, chap. II, § 2) :

$$u d\sigma^2 = A_1 ds_1^2 - A ds^2,$$

ou bien :

$$u = \frac{A}{H^2} - \frac{A_1}{H_1^2}$$

au mouvement du segment $MM_1$. Pour que le point $M_1$ soit le point central de D, il faut et il suffit que la droite $Oe$ soit perpendiculaire à la tangente $M_1T_1$ de la courbe $\Gamma_1$, c'est-à-dire que :

$$A_1 = 0.$$

Alors :

$$u = -\frac{A}{H^2}, \qquad H^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Ainsi l'équation de la ligne de striction est :

$$u = -\frac{A}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Pour que la directrice soit ligne de striction, il faut et il suffit que $A = 0$.

### § 3. — *Théorème de Chasles relatif aux plans tangents de* S

Nous nous proposons d'étudier comment varie le plan tangent au point M, quand le point M décrit la droite D. Par $Od$ (*fig.* 27) menons un plan parallèle au plan tangent TMD et soit $Og$ la trace de ce plan sur le plan $eOf$. Cherchons l'équation de ce plan en prenant respectivement pour axes des $x$, $y$, $z$, les droites $Od$, $Oe$, $Of$ (évidemment indépendantes de la position du point M sur la droite D). A cet effet, formons le

tableau des cosinus directeurs des droites $Od$, $Oe$, $Of$ par rapport aux

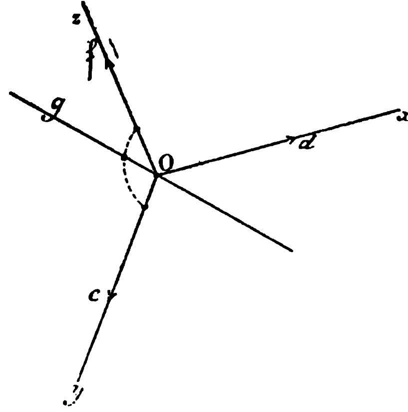



Fig. 27.

axes de Serret relatifs au point M.

| | $Od$ | $Oe$ | $Of$ |
|---|---|---|---|
| MT | $\lambda$ | $\frac{A}{H}$ | $\frac{C\mu - B\nu}{H}$ |
| $MN_1$ | $\mu$ | $\frac{B}{H}$ | $\frac{A\nu - C\lambda}{N}$ |
| $MN_2$ | $\nu$ | $\frac{C}{H}$ | $\frac{B\lambda - A\mu}{H}$ |

Donc les cosinus directeurs de MT relativement aux axes $Od$, $Oe$, $Of$, sont :

$$\lambda, \qquad \frac{A}{H}, \qquad \frac{C\mu - B\nu}{H},$$

et l'équation du plan $dOg$ est :

$$y = \frac{A}{C\mu - B\nu} z.$$

Cette équation a un sens, car :

$$C\mu - B\nu \neq 0.$$

Nous supposons, en effet, que la surface est gauche et non développable (§ 3, chap. II, III$^e$ partie).

Si $\psi$ désigne l'angle de O$y$ avec la trace O$g$, on a donc :

$$\cot\psi = \frac{H^2}{C\mu - B\nu}\cdot\frac{A}{H^2}.$$

D'autre part, soient $M_1$ un point quelconque et $\Gamma_1$ une courbe quelconque de S passant par $M_1$ ; on a en vertu de formules démontrées (III$^e$ partie, chap. II, § 3) :

$$(C\mu - B\nu)\,ds^2 = (C_1\mu_1 - B_1\nu_1)\,ds_1^2,$$
$$H^2 ds^2 = H_1^2 ds_1^2$$

Donc :

$$\frac{H^2}{C\mu - B\nu} = K,$$

K étant une quantité indépendante de la position de M sur D. Enfin, si P est le point central de D, on a vu que :

$$MP = -\frac{A}{H^2}.$$

Donc :

$$\rho = PM = \frac{A}{H^2},$$

et, par suite, on trouve la formule suivante, due à Chasles :

$$\cot\psi = K.\rho.$$

Cette formule montre que, si $\rho$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, le plan tangent tourne toujours *dans le même sens* et vient se confondre successivement avec tous les plans passant par la droite D. Nous retrouvons que pour $\rho$ infini le plan tangent est parallèle au plan des $xy$, et que pour $\rho = 0$ le plan tangent est parallèle au plan des $zx$.

La quantité K porte le nom de *paramètre de distribution* de la surface relatif à la génératrice D.

Remarque. — Le tableau des neuf cosinus, que nous avons formé dans la démonstration précédente, montre que :

$$\frac{A^2}{H^2} + \frac{(C\mu - B\nu)^2}{H^2} + \lambda^2 = 1.$$

c'est-à-dire, avec notre notation habituelle :

$$A^2 + I^2 = (1 - \lambda^2) H^2.$$

### § 4. — *Expression d'un élément d'arc de la surface*

Considérons la courbe définie par l'équation (*fig.* 28):

$$u = \varphi(s).$$

Nous allons calculer la différentielle $ds_1$ de l'abscisse curviligne ($s_1$) d'un point $M_1$, situé sur la courbe.

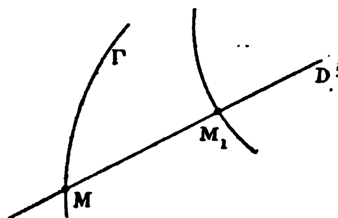



Fig. 28.

*Première méthode.* — Les coordonnées cartésiennes $x$, $y$, $z$ du point $M_1$ sont données par :

$$x_1 = x + au, \qquad y_1 = y + bu, \qquad z_1 = z + cu.$$

De là on tire :

$$\left\{ \begin{aligned} dx_1 &= dx + uda + adu, \\ dy_1 &= dy + udb + bdu, \\ dz_1 &= dz + udc + cdu, \end{aligned} \right.$$

et, par suite :

$$ds_1^2 = ds^2 + u^2H^2ds^2 + 2u\Sigma dadx + 2du\Sigma adx + du^2;$$

mais :

$$\Sigma dadx = Ads^2, \qquad \Sigma adx = \lambda ds;$$

donc :

$$ds_1^2 = (1 + 2Au + H^2u^2)\, ds^2 + 2\lambda duds + du^2.$$

*Deuxième méthode.* — Les formules relatives au déplacement du

segment $MM_1$ donnent :

$$\lambda_1 = \frac{du + \lambda ds}{ds_1}, \qquad I_1 = \frac{I ds^2}{ds_1^2},$$
$$A_1 = \frac{(uH^2 + A)\, ds^2}{ds^2}, \qquad H_1 = \frac{H ds}{ds_1}.$$

Portant ces expressions dans :

$$I_1^2 + A_1^2 = (1 - \lambda_1^2)\, H_1^2,$$

on trouve immédiatement :

$$ds_1^2 = (du + \lambda ds)^2 + \frac{I^2 + (uH^2 + A)^2}{H^2} ds^2,$$

c'est-à-dire :

$$ds_1^2 = (du + \lambda ds)^2 + (1 - \lambda^2 + 2Au + H^2u^2)\; ds^2.$$

Cette formule est évidemment équivalente à la formule déjà trouvée.

Supposons, par exemple, que la courbe donnée soit une ligne coordonnée :

$$u = C^{te}.$$

Alors :

$$ds_1^2 = (1 + 2Au + H^2u^2)\, ds^2.$$

Remarque. — Nous prendrons comme direction positive de la courbe :

$$u = \varphi\,(s),$$

le sens dans lequel se déplace $M_1$, quand le point M se déplace dans le sens positif de la directrice. Alors on aura :

$$\frac{ds_1}{ds} > 0.$$

### § 5. — *Courbure et torsion d'une courbe tracée sur la surface*

Soit :

(1) $$u = \varphi\,(s)$$

l'équation d'une courbe tracée sur S (*fig.* 29) ; proposons-nous de calculer la courbure et la torsion en un point quelconque $M_1$. Nous supposerons toujours

la surface définie par ses équations intrinsèques. Le calcul précédent fait connaître $ds_1$ :

$$ds_1 = \omega ds.$$

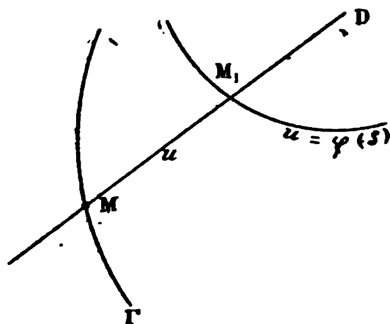



Fig. 29.

Ceci posé, considérons le tableau des cinq formules relatives au déplacement du segment $MM_1$ :

$$\text{(I)} \qquad du = \lambda_1 ds_1 - \lambda ds,$$

$$\text{(II)} \qquad u = \frac{A_1}{H^2_1} - \frac{A}{H^2},$$

$$\text{(III)} \qquad I_1 ds^2_1 = I ds^2,$$

$$\text{(IV)} \qquad H_1 ds_1 = H ds,$$

$$\text{(V)} \qquad \Delta_1 ds^3_1 = \Delta ds^3.$$

Les quatre premières formules font connaître $I_1$, $H_1$, $\lambda_1$ et $A_1$.

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{I}{\omega^2}, & \lambda_1 = \dfrac{u' + \lambda}{\omega} \\ H_1 = \dfrac{H}{\omega}, & A_1 = \dfrac{uH^2 + A}{\omega^2}. \end{cases}$$

Enfin, la formule (V), si on se reporte à l'expression de $\Delta$ (IIIe partie, chap. II, § 4), devient :

$$\text{(2)} \qquad \frac{\omega^3}{1 - \lambda^2_1}\left[I_1 \frac{dA_1}{ds_1} - A_1 \frac{dI_1}{ds_1} + H^2_1\left(\frac{\nu_1}{R_1} + \lambda_1 I_1\right)\right] = \Delta,$$

et fait connaître $\dfrac{\nu_1}{R_1}$ :

$$\text{(2')} \qquad \frac{\nu_1}{R_1} = \psi(s).$$

L'équation :

$$\text{(3)} \qquad \frac{\mu_1}{R_1} = \frac{d\lambda_1}{ds_1} - A_1,$$

conséquence immédiate de la définition de $A_1$ fait connaître le rapport $\dfrac{\mu_1}{R_1}$.

D'autre part :

$$\text{(4)} \qquad \mu^2_1 + \nu^2_1 = 1 - \lambda^2_1.$$

Donc on pourra déterminer les trois quantités $\mu_1$, $\nu_1$, $R_1$, au moyen des équations (2), (3), (4).

Il résulte du choix du sens positif des arcs que $\lambda_1$ a une valeur *unique ;* quant à $\mu_1$ et $\nu_1$, ils ne sont déterminés qu'en valeur numérique, résultat facile à prévoir.

Reste à calculer la torsion $T_1$. A cet effet, remarquons que les équations :

$$(5) \qquad C_1\mu_1 - B_1\nu_1 = I_1,$$
$$(6) \qquad B_1\mu_1 + C_1\nu_1 = - A_1\lambda_1,$$

permettent maintenant de calculer $B_1$ et $C_1$. On pourra donc déterminer T au moyen des équations :

$$C_1 = \frac{d\nu_1}{ds_1} - \frac{\mu_1}{T_1}, \qquad B_1 = \frac{d\mu_1}{ds_1} + \frac{\lambda_1}{R_1} + \frac{\nu_1}{T_1},$$

qui sont fondamentales dans cette théorie.

Connaissant l'équation (1) de la courbe donnée $\Gamma_1$, on sait donc calculer, en chaque point $M_1$ de cette courbe, les huit quantités $\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$, $A_1$, $B_1$, $C_1$, $R_1$, $T_1$.

## § 6. — *Application à un problème de M. Bertrand*

Proposons-nous d'appliquer les formules précédentes au problème classique suivant :

Problème. — Chercher s'il existe une courbe gauche $\Gamma$, dont les normales principales soient aussi normales principales d'une autre courbe $\Gamma_1$.

Soit S la surface réglée, formée par les normales principales de $\Gamma$. Les équations intrinsèques de S sont :

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 1, \qquad \nu = 0.$$

Tout revient à chercher s'il existe sur $S_1$ une courbe $\Gamma_1$ :

$$(\Gamma_1) \qquad u = \varphi\ (s),$$

telle qu'en chaque point $M_1$ $(u, s)$ correspondant au point $M$ $(o, s)$ on ait :

$$\lambda_1 = 0, \qquad \nu_1 = 0.$$

Pour résoudre cette question, il suffit, d'après ce qui précède, d'exprimer que les équations qui déterminent $\lambda_1$ et $\nu_1$ sont satisfaites quand on y suppose :

$$\lambda_1 = 0, \qquad \nu_1 = 0.$$

On obtient ainsi :

$$(1) \qquad u' = 0,$$
$$(2) \qquad \omega^2 (I_1 dA_1 - A_1 dI_1) = IdA - AdI.$$

La première montre que $\Gamma_1$ a une équation de la forme :

$$u = C^{te}.$$

L'équation (2) fournit la condition *nécessaire et suffisante,* à laquelle est

assujettie la courbe $\Gamma$, pourvu qu'on remplace $I_1$, $A_1$ et $\omega$ par leurs valeurs en fonction des éléments de $\Gamma$. Ce dernier calcul peut être dirigé ainsi. Remarquons que :

$$\omega^2 H^2_1 = H^2.$$

D'autre part, l'identité générale :

$$I^2 + A^2 = (1 - \nu^2) H^2 (^*):$$

donne ici :

$$H^2 = I^2 + A^2, \qquad H_1{}^2 = I_1{}^2 + A_1{}^2.$$

L'équation (2) équivaut donc à :

$$\frac{I_1 dA_1 - A_1 dI_1}{I_1{}^2 + A_1{}^2} = \frac{IdA - AdI}{I^2 + A^2},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{I_1}{A_1} = \frac{\frac{I}{A} + a}{1 - a\frac{I}{A}}, \qquad a = C^{te}.$$

ou encore :

$$\frac{I}{uH^2 + A} = \frac{I + aA}{A - aI},$$

ou enfin :

$$a + u\,(I + aA) = o.$$

Mais si on tient compte des équations intrinsèques de S, on trouve :

$$A = \frac{d\lambda}{ds} - \frac{\mu}{R} = -\frac{1}{R}, \qquad I = C\mu - B\nu = C = \frac{d\nu}{ds} - \frac{\mu}{T} = -\frac{1}{T}.$$

La condition cherchée prend donc la forme :

$$\frac{au}{R} + \frac{u}{T} = a.$$

*Il faut donc et il suffit* que la courbure et la torsion soient liées par une relation linéaire à coefficients constants $\xi$, $\eta$ :

$$\frac{\xi}{R} + \frac{\eta}{T} = 1.$$

Si cette condition est satisfaite, l'équation de $\Gamma_1$ est :

$$u = \xi.$$

(*) Cette identité, que nous avons déjà rencontrée, est une conséquence immédiate de l'identité de Lagrange

$$(C\mu - B\nu)^2 + (C\nu + B\mu)^2 = (B^2 + C^2)(\mu^2 + \nu^2).$$

# CHAPITRE II

## SURFACES DÉVELOPPABLES

### § 1. — *Préliminaires*

Considérons une surface réglée ayant pour directrice la courbe $\Gamma$ et engendrée par la droite MD (*fig.* 30). Soient :

$$\lambda = f(s), \qquad \mu = g(s), \qquad \nu = h(s),$$

les équations intrinsèques de cette surface. Nous supposerons dans la

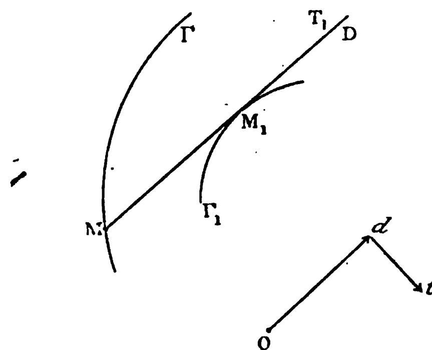



Fig. 30.

suite que cette surface est *développable*. En chaque point M de $\Gamma$, on a donc, en conservant nos notations habituelles :

$$B\nu - C\mu = o.$$

Proposons-nous de chercher l'arête de rebroussement de cette surface. Soient :

$$(\Gamma_1) \qquad\qquad u = \varphi(s),$$

l'équation d'une courbe $\Gamma_1$, tracée sur la surface, et $M_1$ le point de cette

courbe situé sur D. Tout revient à déterminer $\varphi$ de manière que la tangente $M_1T_1$ à la courbe $\Gamma_1$ soit confondue avec MD.

La condition nécessaire et suffisante pour que $M_1T_1$ se confonde avec MD est :

$$A_1 = 0.$$

En effet, cette condition est évidemment nécessaire ; démontrons qu'elle est suffisante. Si $A_1$ est nul, l'identité :

$$A^2_1 + (B_1\nu_1 - C_1\mu_1)^2 = H^2_1(1 - \lambda^2_1),$$

donne :

$$\lambda_1 = \pm 1.$$

Donc en chaque point $M_1$ de $\Gamma$ la tangente est dirigée suivant $M_1D$.

Ceci posé, la formule fondamentale :

$$u = \frac{A_1}{H^2_1} - \frac{A}{H^2},$$

appliquée au segment $MM_1$, donne :

$$u = -\frac{A}{H^2} = -\frac{A}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Telle est l'équation de l'arête de rebroussement.

## § 2. — *Développées d'une courbe gauche*

On appelle développée d'une courbe gauche $\Gamma$ une courbe $\Gamma_1$ dont les tangentes sont des normales de la courbe $\Gamma$. Pour déterminer les développées de $\Gamma$ nous sommes donc conduits à résoudre le problème suivant :

Problème. — Construire une développable passant par la courbe $\Gamma$ et dont les génératrices soient normales à $\Gamma$.

Les équations intrinsèques de la surface sont de la forme (*fig.* 31) :

$$(1) \qquad \lambda = 0, \qquad \mu = g(s), \qquad \nu = h(s),$$

avec :

$$(2) \qquad B\nu - C\mu = 0, \qquad \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Les équations (2) vont nous permettre de calculer $\mu$ et $\nu$.

En effet, si à ces équations on adjoint l'identité :

$$A\lambda + B\mu + C\nu = o, \qquad \text{ou :} \qquad B\mu + C\nu = o,$$

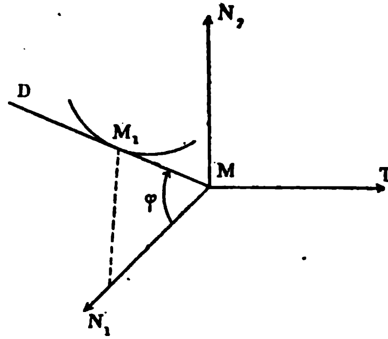



Fig. 31.

on voit immédiatement que la première équation (2) se décompose en deux :

$$B = o, \qquad C = o,$$

c'est-à-dire :

$$(3) \qquad \frac{d\mu}{ds} + \frac{\nu}{T} = o, \qquad \frac{d\nu}{ds} - \frac{\mu}{T} = o.$$

Posons :

$$\mu = \cos\varphi, \qquad \nu = \sin\varphi.$$

Alors on voit que les deux équations (3) se réduisent à une :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{T}, \qquad \text{ou bien :} \qquad \varphi = \int_0 \frac{ds}{T} + \varphi_0.$$

Il y a donc une infinité de développables satisfaisant à la question. Ces développables forment une famille à un paramètre $\varphi_0$.

Ainsi, la courbe $\Gamma$ a une infinité de développées, à savoir les arêtes de rebroussement des développables, que nous venons de trouver.

Soit $\Gamma_1$ l'arête de rebroussement de la développable, définie par :

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{T} + \varphi_0.$$

Cherchons l'équation de $\Gamma_1$. Il suffit d'appliquer la formule du (§ 1) :

$$u = -\frac{A}{A^2 + B^2 + C^2},$$

qui donne ici :

$$u = -\frac{1}{A} = \frac{R}{\mu} = \frac{R}{\cos \varphi}.$$

Soit $M_1$ le point de contact de la génératrice MD avec la courbe $\Gamma_1$ On voit que $M_1$ se trouve sur l'*axe* du cercle osculateur en M à la courbe Γ. Les développées de Γ se trouvent donc sur la surface Σ, lieu des axes des cercles osculateurs de la courbe Γ.

Remarque. — La surface Σ est développable, car l'axe du cercle osculateur est précisément la caractéristique du plan normal; il est aisé de vérifier ce fait. On peut donc dire que Σ est l'enveloppe des plans normaux.

Supposons, en particulier, que la courbe Γ soit plane. Dans ce cas, la torsion est nulle en chaque point et, par suite :

$$\varphi = C^{te} = \varphi_0.$$

La surface Σ est alors un cylindre, ayant ses génératrices perpendiculaires au plan de Γ. La directrice de ce cylindre est la développée plane de la courbe Γ.

## § 3. — *Développantes d'une courbe*

Choisissons sur la courbe $\Gamma_1$ un sens positif et une origine *o* quelconques. Puis, sur la tangente en $M_1$ portons en sens *inverse* de la direction de la tangente une longueur égale à l'arc OM (*fig.* 32), de sorte que :

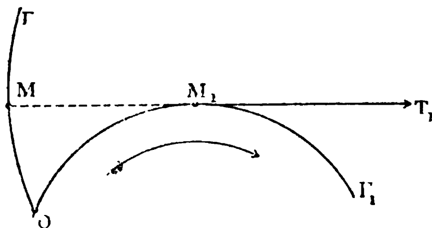



Fig. 32.

$$M_1M = -s_1, \qquad \text{ou :} \qquad MM_1 = s_1.$$

Le lieu Γ des points M est dit une *développante* de $\Gamma_1$.

Il y a évidemment une infinité (simple) de développantes, car on peut choisir arbitrairement l'origine *o*. Ceci posé, démontrons que $\Gamma_1$ est une développée de la courbe Γ.

Appliquons à cet effet la formule :

$$du = \lambda_1 ds_1 - \lambda ds$$

au segment $MM_1$. — On a ici :

$$\lambda_1 = 1, \qquad u = s_1 ;$$

donc :

$$\lambda = o.$$

Ainsi $MM_1$ est normal à $\Gamma$, ce que nous voulions démontrer.

REMARQUE. — Les problèmes qui précèdent donnent naissance à la question suivante :

Les normales principales d'une courbe $\Gamma$ peuvent-elles former une surface développable ? Nous allons voir que non, à moins que la courbe $\Gamma$ ne soit plane. En effet, les équations intrinsèques de la surface sont :

$$\lambda = o, \qquad \mu = 1, \qquad \nu = o.$$

Pour qu'elle soit développable, il faut et il suffit que :

$$C\mu - B\nu = o, \qquad \text{ou :} \qquad C = o.$$

Or :

$$C = \frac{d\nu}{ds} - \frac{\mu}{T} = -\frac{1}{T},$$

il faut donc et il suffit que la torsion soit nulle en chaque point, c'est-à-dire que $\Gamma$ soit plane.

### § 4. — *Surface enveloppe des plans rectifiants d'une courbe*

Proposons-nous de trouver une développable $\Sigma$ passant par $\Gamma$ et admettant cette courbe comme ligne géodésique.

Les équations intrinsèques de la surface sont de la forme :

$$(1) \qquad \lambda = f(s), \qquad \mu = o, \qquad \nu = h(s),$$

avec :

$$(2) \qquad B\nu - C\mu = o, \qquad \lambda^2 + \nu^2 = 1.$$

Les équations (2) déterminent $\lambda$ et $\nu$ ; en effet, la première donne :

$$B = o, \qquad \text{ou :} \qquad \frac{d\mu}{ds} + \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T} = o.$$

Le système (2) devient donc :

$$(3) \qquad \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T} = 0, \qquad \lambda^2 + \nu^2 = 1.$$

Ces équations définissent, dans le plan $TMN_2$ (*fig.* 33), qu'on appelle le plan *rectifiant* au point M, une droite déterminée D ; cette droite est la génératrice de $\Sigma$.

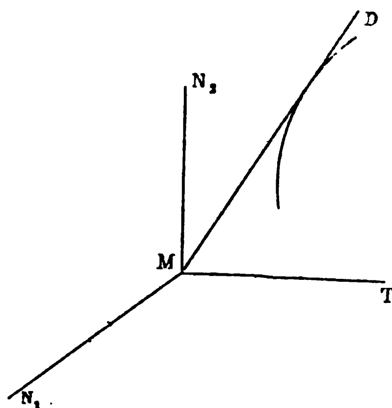



Fig. 33.

Remarquons que le plan tangent à $\Sigma$ suivant la génératrice MD est précisément le plan rectifiant (car ce plan tangent doit contenir MT et MD). On peut donc dire que :

La surface $\Sigma$ est l'enveloppe des plans rectifiants de la courbe $\Gamma$.

Les équations (3) définissent la caractéristique du plan rectifiant en M.

*Cas particulier.* — Supposons la courbe $\Gamma$ choisie de manière que :

$$\frac{R}{T} = C^{te}.$$

Alors :

$$\lambda = C^{te}, \qquad \nu = C^{te}.$$

La génératrice D fait un angle constant avec la courbe $\Gamma$. D'ailleurs, les formules qui définissent A, B, C, montrent que :

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad \text{d'où :} \qquad H = 0.$$

Donc (III^e partie, chap. II, § 3) la surface $\Sigma$ est un cylindre. On obtient par suite le théorème suivant, dû à M. Bertrand :

Si le rapport des deux courbures d'une courbe gauche est constant, cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre quelconque.

Nous avons déjà vu que, si

$$R = C^{te}, \qquad T = C^{te},$$

le cylindre est de révolution.

### § 3. — *Calcul des éléments d'une courbe tracée sur une surface développable*

Prenons pour directrice l'arête de rebroussement Γ de la surface développable Σ, et soit donnée l'équation :

$$u = \varphi(s)$$

d'une courbe $\Gamma_1$ tracée sur la surface.

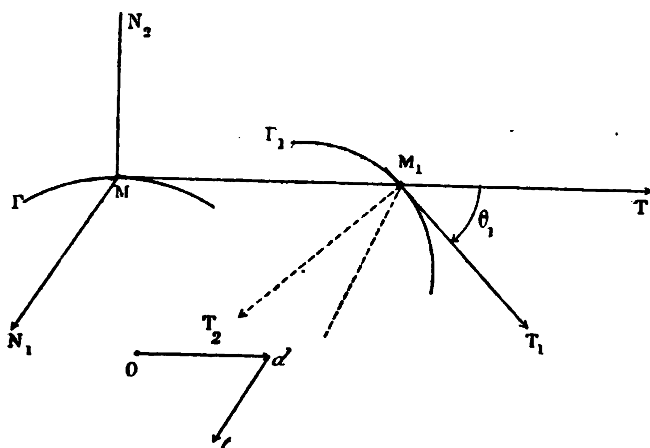



Fig. 34.

Soient, comme d'habitude (*fig.* 34) :

M, un point de Γ ; *s*, son abscisse curviligne ;

$M_1$, le point correspondant de $\Gamma_1$ ; $s_1$, son abscisse curviligne ;

MT, $MN_1$, $MN_2$, les axes de Serret relatifs au point M ;

$M_1T_1$, la direction de la tangente au point $M_1$ de la courbe $\Gamma_1$ ;

$\theta_1$, la valeur algébrique de l'angle qui a pour côté origine $M_1T$ et pour autre côté $M_1T_1$ (¹).

(¹) Cette valeur algébrique est bien définie, puisque $M_1T_1$ est dans le plan $TMN_1$ et que l'orientation de ce plan est déterminée par $MN_2$.

1° *Calcul de $ds_1$ et de $\theta_1$.* — Les deux premières formules relatives à la variation d'un segment, appliquées au segment $MM_1$ (V. III, chap. II, § 2) donnent :

$$du = ds_1 \cos \theta_1 - ds,$$
$$ud\sigma = ds_1 \cos \varepsilon_1.$$

Mais il faut remarquer que $M_1T_1$ est située dans le plan $TMN_1$ et que la dérivée géométrique du segment directeur $Od$ de la droite MT a sa ligne d'application parallèle à $MN_1$ ; donc

$$\cos \varepsilon_1 = \sin \theta_1.$$

Les formules précédentes deviennent

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} ds_1 \cos \theta_1 = du + ds, \\ ds_1 \sin \theta_1 = ud\sigma. \end{array} \right\}$$

De là on tire

$$ds^2_1 = (du + ds)^2 + \frac{u^2}{R^2} ds^2,$$

et, par suite

$$\frac{ds_1}{ds} = + \sqrt{\frac{u^2}{R^2} + (u' + 1)^2} = \omega,$$

en supposant le sens positif de $\Gamma_1$ correspondant à celui de $\Gamma$.

Les formules (1) déterminent alors $\theta_1$.

2° *Calcul de la courbure et de la torsion.* — Par le point $M_1$ menons dans le plan tangent la demi-droite $M_1T_2$, telle que :

$$\widehat{M_1T_1, M_1T_2} = + \frac{\pi}{2}.$$

et soit $\psi_1$ la valeur algébrique de l'angle qui a pour côté origine $M_1T_2$ et pour autre côté la normale principale en $M_1$ de la courbe $\Gamma_1$. Cette valeur est bien déterminée, puisque l'orientation du plan normal en $M_1$ à la courbe $\Gamma_1$ est définie par la demi-droite $M_1T_1$.

Calculons d'abord $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$, en fonctions de $\theta_1$ et $\psi_1$. A cet effet, remarquons que la projection du segment $Od$ sur $M_1T_2$ a pour valeur $(- \sin \theta_1)$ ; donc

$$\mu_1 = - \sin \theta_1 \cos \psi_1,$$
$$\nu_1 = - \sin \theta_1 \cos \left(\psi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta_1 \sin \psi_1,$$

d'ailleurs

$$\lambda_1 = \cos \theta_1.$$

Appliquons la formule (V)

$$\Delta ds^3 = \Delta_1 ds^3_1$$

au mouvement du segment $MM_1$. On a vu (III$^e$ partie, chap. II, § 4) que

$$\Delta = -\frac{1}{R^2T} \qquad \Delta_1 = \frac{H^2_1}{1-\lambda^2_1}\cdot\frac{\nu_1}{R_1}.$$

Or, par définition,

$$H_1 = \frac{d\sigma}{ds_1} = \frac{1}{R\omega};$$

donc

$$\Delta_1 = \frac{\sin\psi_1}{R_1}\cdot\frac{1}{\sin\theta_1}\cdot\frac{1}{R^2\omega^2};$$

mais on vient de voir que

$$ds_1 \sin\theta_1 = u d\sigma, \qquad \text{ou :} \qquad \sin\theta_1 = \frac{u}{R\omega};$$

par suite :

$$\Delta_1 = \frac{\sin\psi_1}{R_1}\cdot\frac{1}{R\omega}\cdot\frac{1}{u}$$

et la formule (V) donne alors

$$(2) \qquad \frac{\sin\psi_1}{R_1} = -\frac{u}{RT}\cdot\frac{1}{\omega^2}.$$

D'autre part, l'équation :

$$A_1 = \frac{d\lambda_1}{ds_1} - \frac{\mu_1}{R_1}$$

donne :

$$\frac{\cos\psi_1}{R_1} = \frac{d\theta_1}{ds_1} + \frac{A_1}{\sin\theta_1};$$

mais de la définition de $A_1$ résulte immédiatement que

$$A_1 = H_1 \sin\theta_1,$$

donc :

$$(3) \qquad \frac{\cos\psi_1}{R_1} = \frac{d\theta_1}{ds_1} + \frac{d\sigma}{ds_1} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{R} + \frac{d\theta_1}{ds}\right).$$

Comme les équations (1) font connaître $\theta_1$ et $\omega$, les formules (2) et (3) permettent de calculer $R_1$ et $\psi_1$.

Enfin, la torsion est donnée par l'équation :

$$I_1 = C_1\mu_1 - B_1\nu_1 = \mu_1\frac{d\nu_1}{ds_1} - \nu_1\frac{d\mu_1}{ds_1} - \frac{\sin^2\theta_1}{T_1} - \frac{\lambda_1\nu_1}{R_1} = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant dans $I_1$ les $B_1$ et $C_1$ par leu rs valeurs. Cette équation se simplifie ainsi :

$$(4) \qquad \frac{1}{T_1} + \frac{d\psi_1}{ds_1} + \frac{\sin\psi_1}{R_1}\cdot\cot\theta_1 = 0.$$

### § 6. — *Application d'une surface développable sur un plan*

Nous allons maintenant étudier la correspondance remarquable qui existe entre les points de $\Sigma$ et ceux d'un plan, correspondance qui fournit une représentation plane des figures tracées sur $\Sigma$.

Soit:

$$\frac{1}{R} = \psi(s)$$

la courbure de l'arête de rebroussement au point M, et soit $(\gamma)$ une courbe tracée dans le plan des $xy$ et telle qu'en chaque point $m$ la courbure soit une fonction de l'abcisse curviligne $(s)$ de ce point, précisément égale à $\psi(s)$. Nous avons vu en géométrie plane que la forme de cette courbe $(\Gamma)$ est complètement déterminée.

Ceci posé, à chaque point M de $\Gamma$ nous ferons correspondre le point $m$ de $(\gamma)$ ayant même abscisse curviligne, et nous prendrons pour direction positive de $(\gamma)$ la direction correspondante à celle de $\Gamma$, c'est-à-dire la direction dans laquelle se déplace le point $m$ quand le point M se meut dans le sens positif. Définissons maintenant le point du plan qui correspond à un point quelconque de la surface.

Sur la tangente en $m$ à la courbe $(\gamma)$, prenons un segment $mm_1$ de valeur algébrique égale à $u$. Les quantités $u$ et $s$ seront dites pour un instant les coordonnées non cartésiennes du point $m_1$ dans le plan. A chaque point M de la surface ayant pour coordonnées superficielles $(s, u)$, faisons correspondre dans le plan le point dont les coordonnées non cartésiennes sont $s$ et $u$. A chaque point de la surface correspond ainsi un point bien déterminé du plan. Il est clair que la réciproque n'est pas exacte: un point du plan d'où l'on peut mener $p$ tangentes à la courbe $(\gamma)$ est le correspondant de $p$ points de la surface. Nous allons voir maintenant les propriétés de cette représentation de la surface sur le plan.

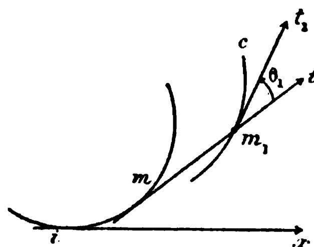


Fig. 35.

1° *Angle de deux tangentes de la courbe* ($\gamma$). — Soient (*fig.* 35) :

$ix$, la direction de la tangente menée à la courbe ($\gamma$) par l'origine des arcs;

$mt$, la direction de la tangente menée à la courbe ($\gamma$) par le point quelconque $m$;

$\varepsilon = \widehat{ix, mt}$, le symbole du deuxième membre représente, suivant l'usage, la valeur algébrique d'un arc de cercle trigonométrique et non un angle évalué en degrés, minutes, secondes.

Par hypothèse, la courbure en $m$ :

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \psi(s).$$

D'autre part, soit I l'origine des arcs de $\Gamma$; nous prendrons, comme d'habitude, pour origine des arcs de l'indicatrice sphérique le point correspondant à I, de sorte que les quantités que nous avons appelées $s$ et $\sigma$ s'annulent en même temps.

Ceci posé, on a aussi :

$$\frac{d\sigma}{ds} = \psi(s);$$

donc :

$$d\sigma = d\varepsilon, \qquad \sigma = \varepsilon + k, \qquad k = C^{te}.$$

Supposons le point M en I; il en résulte :

$$\sigma = 0;$$

mais alors le point $m$, correspondant de M, se trouve en $i$ et on a :

$$\varepsilon = 0,$$

donc la constante $k$ est nulle, et dans tous les cas :

$$(1) \qquad \varepsilon = \sigma.$$

2° *Conservation des angles et des arcs.* — Soient: $m_1$, un point du plan de coordonnées ($s$, $u$) ; ($c$), une courbe passant par ce point (*fig.* 35);

$m_1 t_1$, la direction de la tangente en ce point;

$\theta_1 = \widehat{mt, m_1 t_1}$.

$s_1$, l'abscisse curviligne de $m_1$.

Les formules relatives à la variation d'un segment donnent :

$$(2) \quad \begin{cases} du = ds_1 \cos \theta_1 - ds, \\ ud\sigma = ds_1 \sin \theta_1, \end{cases} \quad \text{ou :} \quad \begin{cases} ds_1 \cos \theta_1 = du + ds, \\ ds_1 \sin \theta_1 = ud\sigma. \end{cases}$$

D'autre part, considérons le point $M_1(s, u)$ de la surface. Soient : C, la courbe qui a pour développement la courbe $(c)$ ; $S_1$, l'abscisse curviligne de $M_1$ ; $M_1T_1$, la direction de la tangente en ce point, et :

$$\Theta_1 = \widehat{MT, M_1T_1},$$

On a trouvé (§ 5) :

$$dS_1 \cos \Theta_1 = du + ds = ds_1 \cos \theta_1,$$
$$dS_1 \sin \Theta_1 = ud\sigma = ds_1 \sin \theta_1.$$

Choisissons les directions positives des deux courbes C et $c$, de manière qu'elles correspondent à celle de l'arête de rebroussement ; alors $dS_1$ et $ds_1$ sont de même signe et, par suite :

$$(3) \quad \begin{cases} S_1 = s_1, \\ \Theta_1 = \theta_1, \end{cases}$$

à un multiple de $2\pi$ près.

Il résulte de là que la représentation précédente conserve les longueurs des arcs et les grandeurs des angles.

3° *Lignes géodésiques. — Courbure géodésique.* — Calculons la courbure $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ au point $m_1$ de la courbe $(c)$. On a :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds_1} + \frac{d\theta_1}{ds_1},$$

ou en posant $\left(\omega = \frac{ds_1}{ds}\right)$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{R} + \frac{d\theta_1}{ds}\right).$$

Or, en égalant deux expressions de la quantité $A_1$, correspondant au point $M_1$ de la courbe C, on a trouvé (§ 5) :

$$\frac{\cos\psi_1}{R_1} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{R} + \frac{d\theta_1}{ds}\right).$$

Donc :

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos\psi_1}{R_1}.$$

Il résulte de là que les lignes géodésiques de la surface, caractérisées par l'équation :

$$\cos \psi_1 = 0,$$

ont pour développement des lignes droites.

La formule (4) conduit à une autre conséquence importante.

Supposons que l'on déforme la surface donnée, de manière que : 1° elle reste développable ; 2° que l'arête de rebroussement conserve la même courbure en chaque point. Il est clair que le développement de la surface sur le plan n'est pas altéré. Ceci posé, suivons les transformations de la courbe C ; en un point $M_1$ de C, l'expression $\frac{\cos \psi_1}{R_1}$ étant constamment égale à la courbure au point $m_1$ est une expression *invariante*. On lui a donné le nom de *courbure géodésique* de la courbe C au point $M_1$.

# CINQUIÈME PARTIE

# PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES SURFACES COURBES

## CHAPITRE I

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES

### § 1. — *Différentielle d'un arc de courbe tracé sur une surface*

Considérons sur la surface S définie par les équations :

$$(1)\qquad x = f(u, v),\qquad y = g(u, v),\qquad z = h(u, v),$$

un point M $(u, v)$ et une courbe C passant par ce point. Soient :

$$(2)\qquad u = \varphi(t),\qquad v = \psi(t),$$

les équations de la courbe C, et supposons que le point M corresponde à la valeur $(t)$ de la variable indépendante. Soit $s$ l'abscisse curviligne du point M; nous nous proposons de calculer la différentielle $ds$.

On a vu que :

$$(3)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Or :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv,\\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv,\\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv ;\end{aligned}\right.$$

donc :

$$(\mathrm{I})\qquad ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\,\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2,$$

avec :

$$(5)\qquad \mathrm{E} = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\qquad \mathrm{F} = \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v},\qquad \mathrm{G} = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Remarquons que les fonctions E, F, G, de $u$, $v$, ne dépendent que du point M et non de la courbe C passant par ce point. Si la surface S est réelle (ce que nous supposerons toujours dans la suite), les quantités E et G sont essentiellement positives.

*Cas particulier.* — Soient MU et MV les directions positives des lignes coordonnées U et V, qui passent par M (p. 18). Nous supposerons ces directions choisies de manière que MU corresponde aux $u$ croissants et MV aux $v$ croissants. Désignons respectivement par $s_1$ et $s_2$ les abscisses de M sur les lignes coordonnées U et V. La formule (I) donne:

$$ds_1^2 = \mathrm{E}du^2, \qquad ds_2^2 = \mathrm{G}dv^2\,;$$

donc, si on a égard au sens positif des lignes U et V,

$$(6) \qquad ds_1 = +\sqrt{\mathrm{E}}du, \qquad ds_2 = +\sqrt{\mathrm{G}}dv.$$

Remarque I. — Plaçons respectivement sur les tangentes MU et MV et sur la tangente MT à la courbe C les segments:

$$\mathrm{MP}_1 = ds_1, \qquad \mathrm{MP}_2 = ds_2, \qquad \mathrm{MP} = ds.$$

Les projections de ces segments sur les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$, sont (Rem., p. 51) indiquées par le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll} \mathrm{MP}: & dx & dy & dz, \\ \mathrm{MP}_1: & \dfrac{\partial x}{\partial u}du & \dfrac{\partial y}{\partial u}du & \dfrac{\partial z}{\partial u}du, \\ \mathrm{MP}_2: & \dfrac{\partial x}{\partial v}dv & \dfrac{\partial y}{\partial v}dv & \dfrac{\partial z}{\partial v}dv. \end{array}$$

Les formules (4) montrent donc que :

« Le segment MP est la résultante des segments $\mathrm{MP}_1$ et $\mathrm{MP}_2$. »

Cette remarque est très souvent utile dans la pratique. On en déduit:

$$(\mathrm{I}') \qquad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + 2\,ds_1 ds_2 \cos\theta,$$

$\theta$ désignant l'angle des directions MU et MV.

Si on remplace dans (I') $ds_1$ et $ds_2$ par leurs valeurs (6), et si on compare le résultat obtenu à la formule (I), on trouve :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{F}}{+\sqrt{\mathrm{EG}}}, \qquad \text{d'où} \qquad \sin\theta = +\frac{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{EG}}}.$$

En particulier :

« Pour que les lignes coordonnées soient orthogonales, il faut et il « suffit que l'on ait en chaque point de la surface :

$$F = o.$$

Ce résultat est aussi une conséquence de l'expression (5) de F.

*Exemple.* — La surface S est de révolution.

Prenons l'axe de révolution pour axe des $z$.

Soient (*fig.* 36) :

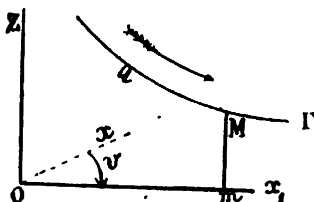



Fig. 36.

Γ, la méridienne située dans le plan méridien $zOx_1$;

$u$, l'abscisse curviligne d'un point M;

$v$, l'angle de $Ox$ avec $Ox_1$.

Il est clair que l'on peut prendre $u$ et $v$ pour les coordonnées superficielles du point M. Les lignes coordonnées sont alors les méridiens et les parallèles. Supposons la méridienne définie par l'équation :

$$r = \varphi(u),$$

où $r$ est le rayon du parallèle de M. Alors :

$$ds_1 = du, \qquad ds_2 = rdv;$$

par suite, la formule (I') devient :

$$ds^2 = du^2 + r^2dv^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2.$$

Remarque II. — La *forme différentielle* à deux variables $u$ et $v$ :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

jouit d'une propriété d'invariance que nous allons signaler. Supposons qu'on déplace la surface S d'une manière quelconque dans l'espace (sans altérer, bien entendu, les coordonnées superficielles $u$, $v$), et qu'on

l'amène par exemple en $S_1$. Les équations de $S_1$ ont la forme :

$$\begin{aligned} X &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ Y &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ Z &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \quad \text{où :} \quad \begin{aligned} x &= f(u, v), \\ y &= g(u, v), \\ z &= h(u, v), \end{aligned}$$

les coefficients $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ satisfaisant aux conditions d'orthogonalité.

Ceci posé, on voit immédiatement que :

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

On peut donc dire que les fonctions E, F, G, restent *invariantes* quand on déplace la surface S. Nous verrons plus loin d'autres fonctions jouissant d'une propriété analogue.

## § 2. — *Paramètres directeurs superficiels d'une tangente*

*Définition analytique.* — Soient M $(u, v)$ un point quelconque de la surface et MT une tangente de cosinus directeurs $l$, $m$, $n$ :

$$(1) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

L'équation du plan tangent montre que :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} l & m & n \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, à une tangente quelconque MT, issue du point M, correspondent deux nombres $\lambda$ et $\mu$ tels que :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} l &= \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \\ m &= \lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v}, \\ n &= \lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

En vertu de la relation (1), ces nombres satisfont à l'équation :

$$(4) \qquad E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 1.$$

La réciproque est évidente : si $\lambda$ et $\mu$ sont deux nombres quelconques, liés par la relation (4), les formules (3) définissent les cosinus directeurs $l$, $m$, $n$, d'une tangente déterminée MT. Les deux nombres $\lambda$ et $\mu$, qui caractérisent la position de MT, seront appelés les *paramètres directeurs superficiels* de cette tangente.

Pour justifier cette dénomination, il faut montrer que les paramètres de la tangente MT ne varient pas, quand on déplace la surface S (Rem. II, p. 107) d'une manière quelconque dans l'espace. Ceci résulte immédiatement de la proposition suivante :

« Théorème. — Soient :

« C, l'une *quelconque* des courbes de la surface tangentes en M à MT ;

« $s$, l'abscisse curviligne du point M sur cette courbe ;

« $du$, $dv$, $ds$, les différentielles de $u$, $v$, $s$, qui correspondent au déplacement du point M sur la courbe C.

« Ceci posé, on a :

$$\frac{du}{ds} = \lambda, \qquad \frac{dv}{ds} = \mu.$$

Cette proposition, qui fournit une propriété commune à toutes les courbes de la surface passant par M et tangentes à MT, s'établit ainsi.

On a :

$$l = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds};$$

d'autre part :

$$l = \frac{\partial x}{\partial u}\lambda + \frac{\partial x}{\partial v}\mu;$$

donc :

$$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{du}{ds} - \lambda\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds} - \mu\right) = 0;$$

de même :

$$\frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{du}{ds} - \lambda\right) + \frac{\partial y}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds} - \mu\right) = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{du}{ds} - \lambda\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds} - \mu\right) = 0.$$

Puisque les trois déterminants fonctionnels de $x$, $y$, $z$, ne sont pas tous nuls (p. 17) au point quelconque M, les relations précédentes

exigent :

$$\frac{du}{ds} = \lambda, \qquad \frac{dv}{ds} = \mu. \tag{4}$$

*Paramètres directeurs de* MU *et* MV. — L'application du théorème précédent et des formules (6) du paragraphe précédent donne, pour les paramètres directeurs (superficiels) de MU, :

$$\lambda_1 = \frac{du}{ds_1} = \frac{1}{+\sqrt{E}}, \qquad \mu_1 = 0; \tag{5}$$

de même, ceux de MV sont :

$$\lambda_2 = 0, \qquad \mu_2 = \frac{1}{+\sqrt{G}}.$$

Il résulte de là que les cosinus directeurs de MU et MV sont :

$$(\text{MU}) \quad a' = \frac{1}{+\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \quad b' = \frac{1}{+\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad c' = \frac{1}{+\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$(\text{MV}) \quad a'' = \frac{1}{+\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \quad b'' = \frac{1}{+\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \quad c'' = \frac{1}{+\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.$$

*Cosinus directeurs de la normale à la surface.* — Choisissons sur la normale en M à la surface la direction MW, telle que le trièdre MU MV MW ait la disposition directe. Les cosinus directeurs $a$, $b$, $c$, de MW sont alors tels que :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} > 0.$$

En élevant au carré ce déterminant, on trouve immédiatement :

$$D^2 = \sin^2 \theta;$$

donc (§ 1) :

$$D = \sin \theta = \frac{+\sqrt{EG - F^2}}{+\sqrt{EG}}.$$

D'autre part, si A, B, C, désignent les mineurs de D, relatifs à $a$, $b$, $c$, il est clair que :

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{Aa + Bb + Cc} = \frac{1}{D} = \frac{1}{\sin \theta}.$$

donc :

$$a = \frac{A}{\sin\theta}, \qquad b = \frac{B}{\sin\theta}, \qquad c = \frac{C}{\sin\theta}.$$

Si on remplace $a'$, $b'$, $c'$, $a''$, $b''$, $c''$, par leurs valeurs trouvées, on obtient :

$$a = \frac{1}{+\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad b = \frac{1}{+\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \quad c = \frac{1}{+\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = EG - F^2.$$

*Représentation géométrique des paramètres de* MT. — Soient $\alpha$ et $\beta$ les composantes du segment directeur de MT suivant MU et MV, c'est-à-dire les paramètres directeurs *ordinaires* de la tangente MT, quand on prend comme axes MU et MV (*fig.* 37).

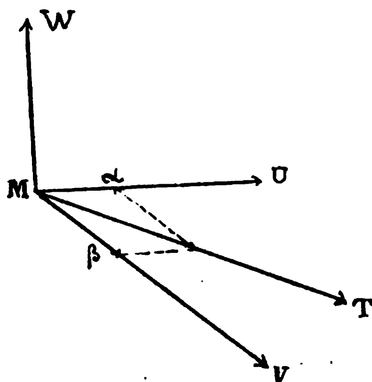



Fig. 37.

Soit aussi $s$ l'abscisse curviligne de M sur une courbe C passant par M et tangente à MT. On a vu que les composantes du segment $ds$ suivant MU et MV sont respectivement :

$$ds_1 = +\sqrt{E}du, \qquad ds_2 = +\sqrt{G}dv;$$

donc :

$$\frac{ds}{1} = \frac{+\sqrt{E}du}{\alpha} = \frac{+\sqrt{G}dv}{\beta},$$

et, par suite,

$$\lambda = \frac{\alpha}{+\sqrt{E}} \qquad \mu = \frac{\beta}{+\sqrt{G}}.$$

Ces formules donnent une interprétation géométrique simple des paramètres $\lambda$ et $\mu$.

*Conditions d'orthogonalité de deux tangentes* MT *et* MT′. — Soient :

$\alpha$, $\beta$, les paramètres directeurs de MT dans le plan MUV ;

$\alpha'$, $\beta'$, » MT′ »

La condition d'orthogonalité est :

$$(\alpha + \beta \cos\theta)\,\alpha' + (\alpha \cos\theta + \beta)\,\beta' = 0.$$

Introduisons dans cette condition les paramètres directeurs superficiels des tangentes :

$$\alpha = \lambda\sqrt{E}, \qquad \alpha' = \lambda'\sqrt{E},$$
$$\beta = \mu\sqrt{G}, \qquad \beta' = \mu'\sqrt{G},$$

et tenons compte de :

$$\cos\theta = \frac{F}{+\sqrt{EG}};$$

nous trouvons la forme simple :

$$(E\lambda + F\mu)\,\lambda' + (F\lambda + G\mu)\,\mu' = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\lambda' + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\mu' = 0, \qquad \varphi = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2.$$

*Condition pour que quatre tangentes* MT, MT′, MT″, MT‴, *forment un faisceau harmonique.* — Soient $(\lambda, \mu)$ $(\lambda', \mu')$ les paramètres superficiels des deux tangentes MT et MT′ et supposons ceux des deux autres tangentes définis par :

$$f(\lambda, \mu) = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = 0,$$
$$E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 1.$$

Les paramètres $\lambda$, $\mu$, $\lambda'$, $\mu'$, sont liés aux paramètres ordinaires par :

$$\lambda = \frac{\alpha}{+\sqrt{E}}, \qquad \mu = \frac{\beta}{+\sqrt{G}},$$
$$\lambda' = \frac{\alpha'}{+\sqrt{E}}, \qquad \mu' = \frac{\beta'}{+\sqrt{G}};$$

d'autre part, les paramètres ordinaires de MT″, MT‴, satisfont à l'équa-

tion :

$$g(\alpha, \beta) = 0,$$

où $g(\alpha, \beta)$ est ce que devient $f(\lambda, \mu)$ quand on remplace $\lambda$ et $\mu$ par $\frac{\alpha}{+\sqrt{E}}$ et $\frac{\beta}{+\sqrt{G}}$ :

$$g(\alpha, \beta) = f(\lambda, \mu).$$

Cette identité montre immédiatement que :

$$\alpha' \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \beta' \frac{\partial g}{\partial \beta} = \lambda' \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mu' \frac{\partial f}{\partial \mu}.$$

Or, la condition pour que MT et MT′ soient conjugués par rapport à MT″ et MT‴ est :

$$\alpha' \frac{\partial g}{\partial \alpha} + \beta' \frac{\partial g}{\partial \beta} = 0 ;$$

donc la condition cherchée est :

$$\lambda' \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mu' \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0.$$

c'est-à-dire :

$$\text{(II)} \qquad (A\lambda + B\mu)\,\lambda' + (B\lambda + C\mu)\,\mu' = 0$$

La condition d'orthogonalité, obtenue précédemment, exprime au fond que les deux tangentes MT et MT′ sont conjuguées par rapport aux tangentes isotropes issues de M.

*Cosinus et sinus de l'angle de deux tangentes* MT, MT′. — Conservons les notations précédentes et désignons par $\varphi$ l'angle qui a pour côté origine MT et pour deuxième côté MT′ :

$$\varphi = \widehat{MT, MT'}$$

La géométrie analytique élémentaire apprend que :

$$\cos\varphi = \alpha\alpha' + \beta\beta' + (\alpha\beta' + \beta\alpha') \cos\theta,$$
$$\sin\varphi = (\alpha\beta' - \beta\alpha') \sin\theta;$$

donc, en passant aux paramètres superficiels, on obtient :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \cos\varphi = (E\lambda + F\mu)\,\lambda' + (F\lambda + G\mu)\,\mu', \\ \sin\varphi = +\sqrt{\Delta}\,(\lambda\mu' - \mu\lambda'). \end{cases}$$

En particulier, supposons :

$$\varphi = + \frac{\pi}{2};$$

alors :

$$(E\lambda + F\mu)\,\lambda' + (F\lambda + G\mu)\,\mu' = 0,$$
$$-\mu\lambda' + \lambda\mu' = \frac{1}{+\sqrt{\Delta}};$$

de là on tire :

$$\text{(IV)} \qquad \lambda' = -\frac{F\lambda + G\mu}{+\sqrt{\Delta}}, \qquad \mu' = \frac{E\lambda + F\mu}{+\sqrt{\Delta}}.$$

Ces formules nous seront utiles plus loin.

*Coefficient angulaire.* — Par analogie avec la géométrie plane, nous appellerons coefficient angulaire *superficiel* de la tangente MT le rapport :

$$\frac{\mu}{\lambda} = m.$$

Le théorème démontré précédemment (p. 109) donne alors lieu au corollaire suivant :

*Corollaire :* Soit C l'une quelconque des courbes de la surface tangentes en M à MT. Les différentielles *du* et *dv*, qui correspondent au déplacement du point M sur cette courbe, satisfont à la relation :

$$\frac{dv}{du} = m.$$

Par analogie encore avec la géométrie plane, on peut aussi appeler coefficients de direction superficiels de MT deux nombres proportionnels à $\lambda$ et $\mu$. Ainsi, *du* et *dv* sont des coefficients de direction de la tangente MT.

## § 3. — *Congruences de tangentes*

A chaque point M de la surface S faisons correspondre une tangente déterminée MT, et supposons la loi de correspondance définie par :

$$m = \varphi(u, v), \qquad (1)$$

où $m$ désigne le coefficient angulaire (superficiel) de MT, et $\varphi(u, v)$ une fonction donnée de $u$ et $v$. L'ensemble des droites MT constitue évidem-

ment une congruence de droites. La surface S est une des nappes de la surface focale.

Ceci posé, à chaque congruence ainsi définie correspond une famille de courbes remarquables. Cette famille se compose des courbes de la surface dont les tangentes appartiennent à la congruence. Soit :

$$v = F(u),$$

l'équation de l'une de ces courbes. En vertu du corollaire (§ 2, p. 114), on a en chaque point :

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v); \tag{2}$$

donc la famille cherchée se compose des courbes intégrales :

$$\psi(u, v) = C^{te}$$

de l'équation (2).

La correspondance entre M et MT peut être définie par :

$$\lambda = \varphi(u, v), \qquad \mu = \psi(u, v), \qquad E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 1.$$

Dans ce cas, les courbes, dont les tangentes appartiennent à la congruence, sont les courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$\frac{du}{\varphi(u, v)} = \frac{dv}{\psi(u, v)}.$$

*Réseau de courbes orthogonales.* — Considérons la congruence définie par :

$$m = \varphi(u,v).$$

A chaque droite MT de la congruence faisons correspondre la tangente perpendiculaire MT′. La congruence des droites MT′ est définie par :

$$m' = -\frac{E + Fm}{F + Gm}.$$

Les familles de courbes liées à ces congruences sont définies respectivement par :

$$dv - \varphi(u, v)\, du = 0 \tag{2}$$
$$(E + F\varphi)\, du + (F + G\varphi)\, dv = 0 \tag{3}$$

Ces deux familles constituent un *réseau de courbes orthogonales* tra-

cées sur la surface. Chaque courbe de l'une des familles coupe orthogonalement toutes les courbes de l'autre.

On peut choisir arbitrairement l'une des familles du réseau ; la seconde est alors complètement déterminée. Soit en effet :

$$\Phi\,(u, v) = C^{te}$$

l'équation de la première famille. La deuxième est évidemment définie par l'équation (3), où l'on suppose $\varphi$ remplacée par sa valeur tirée de :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \varphi = 0.$$

On remarquera en particulier les deux réseaux orthogonaux :

$$\begin{cases} u = C^{te}, \\ E du + F dv = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v = C^{te}, \\ F du + G dv = 0. \end{cases}$$

# CHAPITRE II

## DÉFINITION DES SIX FONCTIONS QUI CARACTÉRISENT UNE SURFACE TRIÈDRE SUPPLÉMENTAIRE DU TRIÈDRE MU, MV, MW

---

### § 1. — *Les six fonctions caractéristiques d'une surface*

On a vu (p. 108) que les fonctions E, F, G, restent invariantes quand on déplace la surface S d'une manière quelconque dans l'espace. D'autres fonctions jouissent, comme nous allons voir, de la même propriété.

Supposons qu'on donne à la surface S un déplacement quelconque, et soient (X, Y, Z) ce que deviennent après ce déplacement les coordonnées $x$, $y$, $z$, d'un point quelconque M de la surface. Les formules qui lient (X, Y, Z) à ($x$, $y$, $z$) ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z + x_0, \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z + y_0, \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z + z_0, \end{aligned}$$

où $\alpha$, $\beta$, ..., $\beta''$, $\gamma''$, satisfont aux conditions d'orthogonalité. Les cosinus directeurs $a$, $b$, $c$, d'une droite MD invariablement liée au point M, se transforment en A, B, C, d'après la loi suivante :

$$\begin{aligned} a &= \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ b &= \alpha' A + \beta' B + \gamma' C, \\ c &= \alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C. \end{aligned}$$

En particulier, nous supposerons que MD coïncide avec la *normale* MW à la surface.

Ceci posé, formons les différentielles totales des fonctions $x$ et $a$ des variables $u$ et $v$ :

$$\begin{aligned} dx &= \alpha dX + \beta dY + \gamma dZ, \\ da &= \alpha dA + \beta dB + \gamma dC, \end{aligned}$$

on obtient des expressions analogues pour $dy$, $dz$, $db$, $dc$. De là, on déduit :

$$(1) \qquad \sum dadx = \sum dAdX.$$

On peut donc dire que la forme différentielle à deux variables $u$, $v$ :

$$\sum dadx = -(E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2)$$

reste *invariante*, quand on déplace S d'une manière quelconque, sans altérer, bien entendu, les coordonnées superficielles $u$ et $v$. Ainsi :

« Les six fonctions E, F, G, E′, F′, G′, restent invariantes quand on « déplace la surface S d'une manière quelconque dans l'espace. »

Ces six fonctions caractérisent, comme nous le verrons, la forme de la surface. En d'autres termes, si ces fonctions sont données, la surface est complètement déterminée, indépendamment de sa position dans l'espace. Cette proposition est fondamentale dans la théorie des surfaces.

*Remarque.* — La formule de définition (1) montre que :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} E' &= -\sum \frac{\partial a}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \sum a \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \\ F' = -\sum \frac{\partial a}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} &= -\sum \frac{\partial a}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \sum a \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \\ G' &= -\sum \frac{\partial a}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \sum a \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules, dont nous ferons beaucoup d'usage, résultent immédiatement des identités :

$$\sum a \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum a \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

## § 2. — *Lemme d'algèbre*

Avant de démontrer le théorème fondamental, nous établirons la proposition élémentaire suivante. Soient :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad D' = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \end{vmatrix}$$

deux déterminants différents de zéro. Concevons qu'on fasse le produit de ces deux déterminants, en multipliant *ligne par ligne*, et supposons que, dans le déterminant produit : 1° les éléments de la diagonale principale soient égaux à l'unité ; 2° que les autres éléments soient nuls. En d'autres termes, soient :

$$(1)\left\{\begin{array}{lll} aa'+bb'+cc'=1, & a_1a'+b_1b'+c_1c'=0, & a_2a'+b_2b'+c_2c'=0,\\ aa'_1+bb'_1+cc'_1=0, & a_1a'_1+b_1b'_1+c_1c'_1=1, & a_2a'_1+b_2b'_1+c_2c'_1=0,\\ aa'_2+bb'_2+cc'_2=0, & a_1a'_2+b_1b'_2+c_1c'_2=0, & a_2a'_2+b_2b'_2+c_2c'_2=1. \end{array}\right.$$

Nous allons démontrer que :

« Si l'on fait le produit des déterminants D et D' en multipliant *co-* « *lonne par colonne*, on obtient un déterminant dans lequel : 1° les « éléments de la diagonale principale sont tous égaux à l'unité ; 2° les « autres éléments sont tous nuls. »

Ce théorème est, comme on voit, une généralisation du théorème relatif aux neuf cosinus d'un trièdre trirectangle. On peut le démontrer de la manière suivante :

Des formules (1) on tire :

$$(2)\qquad \frac{a}{A'}=\frac{b}{B'}=\frac{c}{C'},$$

chaque grande lettre désignant le mineur de l'élément représenté par la petite lettre correspondante. Les relations (2) donnent :

$$\frac{a}{A'}=\frac{b}{B'}=\frac{c}{C'}=\frac{aa'+bb'+cc'}{A'a'+B'b'+C'c'}=\frac{1}{D'}.$$

De même :

$$\frac{a_1}{A'_1}=\frac{b_1}{B'_1}=\dots=\frac{1}{D'}.$$

Donc :

« Le rapport d'un élément quelconque de D au mineur correspondant « de D' est constant et égal à l'inverse de D'. »

Ce point une fois établi, remarquons que :

$$a=\frac{A'}{D'},\qquad a_1=\frac{A'_1}{D'},\qquad a_2=\frac{A'_2}{D'},$$

donc :

$$\begin{aligned} aa'+a_1a'_1+a_2a'_2&=1,\\ ab'+a_1b'_1+a_2b'_2&=0,\\ ac'+a_1c'_1+a_2c'_2&=0. \end{aligned}$$

On démontre de même les six autres relations en question. Nous dirons dans la suite que le système d'éléments (D′) est l'*inverse* du système (D). L'inverse d'un système quelconque D (à déterminant différent de zéro) est complètement déterminé.

## § 3. — *Trièdre supplémentaire du trièdre* MU, MV, MW

Considérons le trièdre déjà défini (MU, MV, MW). Nous pouvons prendre comme coefficients de direction des arêtes les éléments du système :

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{MW}, \\ \text{MU}, \\ \text{MV}, \end{array}$$

Ceci posé considérons le trièdre supplémentaire (MU′, MV′, MW) l'arête MU′ étant perpendiculaire à MV, et l'arête MV′ étant perpendiculaire à MU. Il est clair que l'on peut prendre pour coefficients de direction des arêtes les éléments du système *inverse* (p. 119) de (1) à savoir :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{MW}, \\ \text{MU}', \\ \text{MV}'. \end{array}$$

Les éléments du système (2) intervenant dans beaucoup de calculs relatifs à la surface S, nous allons indiquer la manière de les calculer.

La droite MU se trouve dans le plan des deux droites MU′, MV′; on a donc :

$$(3)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda a_1 + \mu a_2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \lambda b_1 + \mu b_2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \lambda c_1 + \mu c_2.$$

Combinons *linéairement* ces équations, en prenant pour multiplicateurs $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$; nous obtenons (§ 2) :

$$\lambda = \text{E};$$

de même :

$$\mu = \text{F}.$$

Ainsi :

$$(4)\quad \frac{\partial x}{\partial u} = Ea_1 + Fa_2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = Eb_1 + Fb_2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = Ec_1 + Fc_2.$$

On trouve de même :

$$(5)\quad \frac{\partial x}{\partial v} = Fa_1 + Ga_2, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = Fb_1 + Gb_2, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = Fc_1 + Gc_2.$$

Les couples $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$, $(c_1, c_2)$, sont les couples *adjoints* des couples $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$, relativement à la forme :

$$(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2).$$

Application. — Proposons-nous de calculer les dérivées de $a$, $b$, $c$, par rapport à $u$ et $v$. Une droite de coefficients de direction $\left(\frac{\partial a}{\partial u}, \frac{\partial b}{\partial u}, \frac{\partial c}{\partial u}\right)$ est évidemment parallèle au plan tangent en M $(u, v)$, donc :

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \lambda a_1 + \mu a_2, \quad \frac{\partial b}{\partial u} = \lambda b_1 + \mu b_2, \quad \frac{\partial c}{\partial u} = \lambda c_1 + \mu c_2.$$

Formons la combinaison linéaire qui a pour multiplicateurs respectifs $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, nous obtenons :

$$\lambda = \sum \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u},$$

c'est-à-dire (p. 118) :

$$\lambda = -E';$$

de même :

$$\mu = -F'.$$

Ainsi les dérivées par rapport à $u$ sont définies par :

$$(6)\quad \frac{\partial a}{\partial u} + E'a_1 + F'a_2 = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial u} + E'b_1 + F'b_2 = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial u} + E'c_1 + F'c_2 = 0,$$

de même :

$$(7)\quad \frac{\partial a}{\partial v} + F'a_1 + G'a_2 = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial v} + F'b_1 + G'b_2 = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial v} + F'c_1 + G'c_2 = 0.$$

Ces formules nous seront utiles plus loin.

# CHAPITRE III

## THÉORÈME FONDAMENTAL RELATIF AUX FONCTIONS E, F, G, E′, F′, G′, RELATIONS ENTRE CES FONCTIONS

### § 1. — *Formules de Gauss*

Les propositions établies dans le chapitre précédent vont nous permettre de démontrer que la surface S, indépendamment de sa position dans l'espace, est complètement déterminée quand on connaît les six fonctions E, F, G, E′. F′, G′.

Ce théorème fondamental résulte de formules dues à Gauss, qui permettent de calculer en chaque point de la surface S les dérivées secondes de $x$, $y$, $z$ en fonction des dérivées premières et des fonctions E, F, G, E′, F′, G′. Proposons-nous d'abord de trouver ces formules.

Les équations qui définissent $x$, $y$, $z$, quand on connaît E, F, G, E′, F′, G′, sont évidemment les suivantes :

$$(1)\quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{F}, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G},$$

$$(2)\quad \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{E}', \qquad \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \mathrm{F}', \qquad \sum a\,\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \mathrm{G}'.$$

En différentiant les équations (1) on trouve évidemment :

$$(3)\quad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = m. \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = m', \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = m'',$$

$$(4)\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = n, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = n', \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = n''.$$

où $m$, $n$, $m'$, $n'$, $m''$, $n''$, désignent (d'après Gauss) les fonctions sui-

vantes :

$$(5)\quad \begin{cases} m = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial u}, & m' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}, & m'' = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}; \\ n = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, & n' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}, & n'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}. \end{cases}$$

Pour obtenir les formules cherchées, il suffit donc de résoudre les neuf équations (2), (3) et (4) par rapport aux dérivées du second ordre des fonctions $x$, $y$, $z$. Cette résolution est particulièrement simple, si l'on utilise les deux systèmes inverses (§ 3, p. 120) :

$$(6)\quad D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad D' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

correspondant au trièdre MU, MV, MW, et à son supplémentaire. En effet, combinons linéairement les équations (2), (3) et (4), en prenant pour multiplicateurs respectifs les quantités $a$, $a_1$, $a_2$. Le lemme d'algèbre établi plus haut (p. 118) permet d'écrire immédiatement :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = E'a + ma_1 + na_2, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = F'a + m'a_1 + n'a_2, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = G'a + m''a_1 + n''a_2. \end{cases}$$

On calcule de même les dérivées secondes de $y$ et $z$ ; il suffit de prendre pour multiplicateurs $(b, b_1, b_2)$, puis $(c, c_1, c_2)$. Les formules (I) et celles qui en dérivent par permutation sont les formules cherchées, puisque $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, ont déjà été calculées (p. 111 et p. 121) en fonction des dérivées premières de $x$, $y$, $z$ :

On peut donner aux formules (I) une autre expression également avantageuse. Considérons les couples $(\mu, \nu)$, $(\mu', \nu')$, $(\mu'', \nu'')$, *adjoints* de $(m, n)$, $(m', n')$, $(m'', n'')$, par rapport à la forme $(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2)$, c'est-à-dire les couples définis par :

$$(7)\quad \begin{cases} E\mu + F\nu = m, & E\mu' + F\nu' = m', & E\mu'' + F\nu'' = m''; \\ F\mu + G\nu = n, & F\mu' + G\nu' = n', & F\mu'' + G\nu'' = n''. \end{cases}$$

Remplaçons dans (I) les quantités $m$, $n$, $m'$, $n'$, $m''$, $n''$, par ces valeurs et tenons compte des équations qui définissent $a_1$ et $a_2$ (p. 121) :

$$Ea_1 + Fa_2 = \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$Fa_1 + Ga_2 = \frac{\partial x}{\partial v};$$

nous obtenons immédiatement :

$$(\text{I}^{\text{bis}}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= E'a + \mu \frac{\partial x}{\partial u} + \nu \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= F'a + \mu' \frac{\partial x}{\partial u} + \nu' \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= G'a + \mu'' \frac{\partial x}{\partial u} + \nu'' \frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Par la permutation des lettres $x$, $y$, $z$, d'une part, et de $(a, b, c)$, d'autre part, on obtient deux autres systèmes analogues au système (I). Les formules (I) et (I $^{\text{bis}}$), équivalentes aux formules de Gauss, seront appelées les *formules de Gauss.*

## § 2. — *Relations entre les fonctions* E, F, G, E', F', G'

Les formules précédentes vont nous conduire d'abord à cette conséquence importante, à savoir : que les fonctions données E', F', G', ne peuvent être choisies arbitrairement et qu'elles sont liées aux fonctions E, F, G, par des relations différentielles simples. La voie la plus simple à suivre pour obtenir ce résultat remarquable nous paraît la suivante : 1° Éliminer les douze dérivées du troisième ordre de $x$, $y$, $z$, entre les dix-huit équations (A) obtenues en différentiant par rapport à $u$ et $v$ les équations (2), (3), (4) ; on obtiendra ainsi *trois* équations distinctes (B) ; 2° Éliminer les neuf dérivées du deuxième ordre de $x$, $y$, $z$, entre les trois équations (B) et les neuf équations (2), (3), (4) ; on constatera alors que les dérivées du premier ordre s'éliminent d'elles-mêmes et on tombera sur les relations cherchées.

*Première opération.* — Comme douze des équations (A) sont certainement résolubles par rapport aux dérivées du troisième ordre (car $D \neq 0$), le résultat de l'élimination indiquée se compose de six équations

(distinctes ou non); ce sont évidemment les suivantes :

$$
(\mathrm{B})\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{\partial E'}{\partial v}-\dfrac{\partial F'}{\partial u}=\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\dfrac{\partial a}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right);\\
(2) & \dfrac{\partial F'}{\partial v}-\dfrac{\partial G'}{\partial u}=\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}-\dfrac{\partial a}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right);\\
(3) & \dfrac{\partial m'}{\partial v}-\dfrac{\partial m''}{\partial u}=\sum\left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2-\sum\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2};
\end{array}\right.
$$

$$
(4)\quad \frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial m'}{\partial u}=0;
$$

$$
(5)\quad \frac{\partial n}{\partial v}-\frac{\partial n'}{\partial u}=\sum\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\sum\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2;
$$

$$
(6)\quad \frac{\partial n'}{\partial v}-\frac{\partial n''}{\partial u}=0.
$$

Ces six équations se réduisent aux *trois* équations (1), (2) et (3). En effet, les équations (4) et (6) sont identiquement vérifiées (voir les expressions de $m$, $m'$, $n'$, $n''$, p. 123), et l'équation (5) est équivalente à l'équation (3) en vertu de l'identité :

$$
\frac{\partial}{\partial u}(n'+m'')=\frac{\partial}{\partial v}(n+m').
$$

*Deuxième opération.* — Éliminons maintenant les dérivées du deuxième ordre de $x$, $y$, $z$, entre les équations (B) et les neuf équations (2), (3), (4), du paragraphe précédent. Il suffit pour cela de porter dans (B) les expressions ($\mathrm{I}^{\text{bis}}$) des dérivées secondes de $x$, $y$, $z$, et de remplacer les dérivées de $a$, $b$, $c$, par les valeurs obtenues plus haut (p. 121).

La première des équations (B) devient ainsi :

$$
\frac{\partial E'}{\partial v}-\frac{\partial F'}{\partial u}=\sum\Big[(E'a_1+F'a_2)\left(F'a+\mu'\frac{\partial x}{\partial u}+\nu'\frac{\partial x}{\partial v}\right)
-(F'a_1+G'a_2)\left(E'a+\mu\frac{\partial x}{\partial u}+\nu\frac{\partial x}{\partial v}\right)\Big].
$$

Les relations entre les systèmes inverses D et D' (§ 1) donnent :

$$
\sum aa_1=0,\qquad \sum a_1\frac{\partial x}{\partial u}=1,\qquad \sum a_1\frac{\partial x}{\partial v}=0\ \ldots\ldots\ \text{etc.}\ldots\ldots
$$

L'équation précédente se transforme alors en celle-ci :

$$
\frac{\partial E'}{\partial v}-\frac{\partial F'}{\partial v}=(\mu'E'+\nu'F')-(\mu F'+\nu G').
$$

La deuxième équation (B) donne de même :

$$\frac{\partial F'}{\partial v} - \frac{\partial G'}{\partial u} = (\mu''E' + \nu''F') - (\mu'F' + \nu'G').$$

Enfin, la troisième équation (B) devient :

$$\frac{\partial m'}{\partial v} - \frac{\partial m''}{\partial u} = \sum \left(F'a + \mu'\frac{\partial x}{\partial u} + \nu'\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$
$$- \sum \left(E'a + \mu\frac{\partial x}{\partial u} + \nu\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(G'a + \mu''\frac{\partial x}{\partial u} + \nu''\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial m'}{\partial v} - \frac{\partial m''}{\partial u} = F'^2 - E'G' + E(\mu'^2 - \mu\mu'')$$
$$+ F(2\mu'\nu' - \mu\nu'' - \nu\mu'') + G(\nu'^2 - \nu\nu''),$$

ou enfin :

$$E'G' - F'^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$$
$$+ E(\mu'^2 - \mu\mu'') + F(2\mu'\nu' - \mu\nu'' - \nu\mu'') + G(\nu'^2 - \nu\nu'').$$

On voit que la quantité $(E'G' - F'^2)$ ne dépend que de E, F, G, et de leurs dérivées [1]. Nous verrons plus tard l'interprétation géométrique remarquable de cette particularité.

En résumé, les relations entre E, F, G, E', F', G', sont :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E'}{\partial v} - \dfrac{\partial F'}{\partial u} = (\mu'E' + \nu'F') - (\mu F' + \nu G') \\ \dfrac{\partial F'}{\partial v} - \dfrac{\partial G'}{\partial u} = (\mu''E' + \nu''F') - (\mu'F' + \nu'G'); \\ E'G' - F'^2 = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2} \\ + E(\mu'^2 - \mu\mu'') + F(2\mu'\nu' - \mu\nu'' - \nu\mu'') + G(\nu'^2 - \nu\nu''). \end{cases}$$

## § 3. — *Théorème fondamental relatif aux fonctions* E, F, G, E', F', G'

Soient données les six fonctions E, F, G, E', F', G', de $(u, v)$, et supposons que ces six fonctions satisfassent aux *conditions d'intégrabi-*

(1) Cette remarque est due à Gauss.

*lité* (II). Nous allons démontrer que la surface S, indépendamment de sa position dans l'espace, est complètement déterminée.

La surface S est définie par les équations :

$$(1)\quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{F}, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G}.$$

et les suivantes :

$$(2)\quad \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \mathrm{E}', \qquad \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \mathrm{F}', \qquad \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \mathrm{G}'$$

avec :

$$a = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}{+\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \qquad b = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}}{+\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \qquad c = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}}{+\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}$$

Les calculs développés précédemment montrent que l'on peut remplacer ce système par les neuf équations de Gauss et par les trois équations (1). Un théorème de calcul intégral, que nous admettrons ici, nous apprend qu'il existe une surface S [dans le sens adopté (p. 17) au commencement de ce cours] et une seule satisfaisant à la question, si l'on se donne les valeurs *initiales* $x_0, y_0, z_0, \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0, \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0, \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0, \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0,$ $\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0, \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0,$ de $x$, $y$, $z$, et de leurs dérivées premières pour ($u = u_0$, $v = v_0$), valeurs initiales assujetties uniquement aux conditions :

$$(3)\quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0^2 = \mathrm{E}(u_0, v_0) \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0 = \mathrm{F}(u_0, v_0),$$
$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0^2 = \mathrm{G}(u_0, v_0).$$

A tous les systèmes de valeurs initiales correspond une famille de surfaces S, à six paramètres, satisfaisant à la question. Tout revient à démontrer que ces surfaces sont identiques et ne diffèrent que par la position qu'elles occupent dans l'espace.

A cet effet, remarquons que les équations (I *bis*) permettent de calculer une quelconque des dérivées d'ordre $n$ de $x$ en fonction des dérivées premières. Chaque dérivée d'ordre $n$ est évidemment, en vertu des formules (p. 121) qui donnent les dérivées de $a$, $b$, $c$, une forme linéaire

en $a$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$. Ainsi :

$$(4) \qquad \frac{\partial^n x}{\partial u^\alpha \partial v^\beta} = \mathrm{P}a + \mathrm{Q}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{R}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

P, Q, R étant des fonctions déterminées des fonctions données et de leurs dérivées. Si donc on écrit le développement en série de $x$ suivant les puissances croissantes de $(u - u_0)$ et $(v - v_0)$, en groupant ensemble les termes en $a_0$, ensemble les termes en $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0$, enfin, ensemble les termes en $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0$, on obtient une expression de la forme :

$$(5) \qquad x = x_0 + \mathrm{A}a_0 + \mathrm{B}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 + \mathrm{C}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0,$$

où A, B, C, désignent les sommes de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $(u - u_0)$ et $(v - v_0)$, à coefficients parfaitement déterminés. On démontre de même que :

$$\frac{\partial^n y}{\partial u^\alpha \partial v^\beta} = \mathrm{P}b + \mathrm{Q}\frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{R}\frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial u^\alpha \partial v^\beta} = \mathrm{P}c + \mathrm{Q}\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{R}\frac{\partial z}{\partial v},$$

et, par suite :

$$(6) \qquad y = y_0 + \mathrm{A}b_0 + \mathrm{B}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 + \mathrm{C}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0,$$

$$(7) \qquad z = z_0 + \mathrm{A}c_0 + \mathrm{B}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 + \mathrm{C}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0.$$

Ceci posé, les relations de condition (3) nous permettent de définir un trièdre *birectangle* particulier, à savoir le trièdre T ayant pour sommet le point $(x_0, y_0, z_0)$ et pour ses neuf cosinus :

$$(\mathrm{O}) \qquad a_0, \qquad a'_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}_0}}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0, \qquad a''_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0;$$

$$(\mathrm{O}) \qquad b_0, \qquad b'_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}_0}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0, \qquad b''_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0;$$

$$(\mathrm{O}) \qquad c_0, \qquad c'_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}_0}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0, \qquad c''_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}_0}}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0$$

Ce trièdre se déplace dans l'espace sans se déformer, quand on fait varier les conditions initiales, car le cosinus de l'angle des arêtes

obliques a une valeur constante :

$$a'_0a''_0 + b'b''_0 + c'_0c''_0 = \frac{F_0}{\sqrt{E_0G_0}}.$$

Or, la surface définie par les équations (5), (6) et (7) a pour équations, relativement au trièdre T, les suivantes :

$$(8) \qquad X = A, \qquad Y = B\sqrt{E_0}, \qquad Z = C\sqrt{G_0}.$$

Donc toutes les surfaces S satisfaisant à la question sont identiques à la surface bien déterminée (8). Ainsi se trouve démontrée la réciproque de la proposition établie plus haut (p. 118).

# CHAPITRE IV

## QUELQUES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE THÉORÈME DE MEUSNIER ET D'OSSIAN BONNET COURBURE ET TORSION EN UN POINT D'UNE COURBE DE LA SURFACE. COURBURE GÉODÉSIQUE

### § 1. — *Quelques propriétés infinitésimales des courbes tracées sur une surface*

Nous nous occuperons, dans ce chapitre, de quelques propriétés communes aux courbes (Γ) de la surface, qui passent par un même point M et admettent en ce point la *même tangente* MT. Nous prendrons pour point de départ de cette étude la remarque fort simple qui va suivre.

Soient :

1° $u$, $v$ les coordonnées superficielles du point M ;

2° $\lambda$, $\mu$ les paramètres directeurs superficiels de la tangente MT;

3° $s$, l'abscisse curviligne de M sur l'une (quelconque) des courbes Γ ;

4° O, un point fixe de l'espace.

A chaque point tel que M de la surface, faisons correspondre un segment déterminé O$m$. Ce segment jouit de cette propriété remarquable :

Théorème. — La dérivée géométrique ($mp$) du segment O$m$, prise par rapport à $s$, est un segment *invariant* relativement aux courbes (Γ); en d'autres termes, ce segment ($mp$) est le même pour toutes les courbes (Γ) de la famille considérée.

Soient :

$$a = f_1(u, v), \qquad b = g_1(u, v), \qquad c = h_1(u, v),$$

les projections de O$m$ sur O$x$, O$y$, O$z$, et désignons par la caractéris-

tique $d$ les différentielles correspondant au déplacement de M sur la courbe ($\Gamma$). Les projections de $(mp)$ sur les axes sont représentées par $\left(\frac{da}{ds}, \frac{db}{ds}, \frac{dc}{ds}\right)$. D'autre part, en vertu d'un théorème (p. 109) démontré, on a :

$$\frac{du}{ds} = \lambda, \qquad \frac{dv}{ds} = \mu.$$

Par suite :

$$\frac{da}{ds} = \frac{\partial a}{\partial u}\lambda + \frac{\partial a}{\partial v}\mu,$$
$$\frac{db}{ds} = \frac{\partial b}{\partial u}\lambda + \frac{\partial b}{\partial v}\mu,$$
$$\frac{dc}{ds} = \frac{\partial c}{\partial u}\lambda + \frac{\partial c}{\partial v}\mu.$$

On voit donc que les projections de $(mp)$ sur les axes ne dépendent nullement de la courbe $\Gamma$ choisie. Ce segment reste donc le même pour toutes les courbes de la famille considérée.

*Corollaire.* — Soit $M\Theta$ la demi-normale à MT, située dans le plan tangent en M, et telle que :

$$\widehat{MT, M\Theta} = +\frac{\pi}{2}.$$

Il est clair qne les projections de $(mp)$ sur MT, $M\Theta$ et MW sont trois segments *invariants* relativement aux courbes $\Gamma$.

## § 2. — *Théorèmes de Meusnier et d'Ossian Bonnet*

Supposons, en particulier, que le segment $(Om)$ soit le *segment directeur* de la normale MW, alors la projection de $(mp)$ sur MW est nulle en vertu de l'identité :

$$ada + bdb + cdc = 0.$$

Évaluons les projections P et Q de $mp$ suivant MT et $M\Theta$. Désignons comme d'habitude par $MN_1$ et $MN_2$ la normale principale et la binormale de la courbe $\Gamma$ au point M.

Les cosinus directeurs de MW relativement aux axes MT, $MN_1$, $MN_2$ sont :

$$\lambda = o, \qquad \mu = \cos \varpi, \qquad \nu = \sin \varpi,$$

où (*fig.* 38) :

$$\varpi = \widehat{MN_1, MW}.$$

Les projections A, B, C de $(mp)$ sur les mêmes axes sont (p. 75) :

$$A = -\frac{\cos \varpi}{R}, \quad B = -\sin \varpi \left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{T}\right), \quad C = \cos \varpi \left(\frac{d\varpi}{ds} - \frac{1}{T}\right),$$

et par suite :

$$P = -\frac{\cos \varpi}{R}, \qquad Q = \frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds}.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème. — Pour toutes les courbes Γ, qui passent par le point M et admettent en ce point la même tangente, les expressions différentielles $\frac{\cos \varpi}{R}$ et $\left(\frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds}\right)$ conservent la même valeur.

$$\frac{\cos \varpi}{R} = \text{inv}, \qquad \frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds} = \text{inv}.$$

La première partie est la traduction analytique d'un théorème dû à Meusnier ; la seconde partie a été découverte par Ossian Bonnet. On voit comment la remarque du paragraphe précédent permet de démontrer simultanément deux théorèmes célèbres.

Remarque. — Considérons la section $(\Gamma_1)$ de la surface par le plan TMW, c'est-à-dire la section *normale* tangente à MT. Pour cette courbe particulière, on a (si on choisit pour direction positive de sa normale en M la direction MW) :

$$\varpi = o, \qquad \cos \varpi = 1.$$

Le théorème précédent donne donc :

$$\frac{\cos \varpi}{R} = \frac{1}{R_1},$$

ou bien :

$$R_1 \cos \varpi = R,$$

$R_1$ désignant (en grandeur et en signe) le rayon de courbure en M de la courbe $(\Gamma_1)$. Soient I et $I_1$ les centres de courbure respectifs (*fig.* 38) des courbes Γ et $\Gamma_1$ au point M ; l'équation précédente exprime, en vertu du *théorème des projections*, que la projection de $I_1$ sur le plan $TMN_1$ coïncide avec le point I. En d'autres termes :

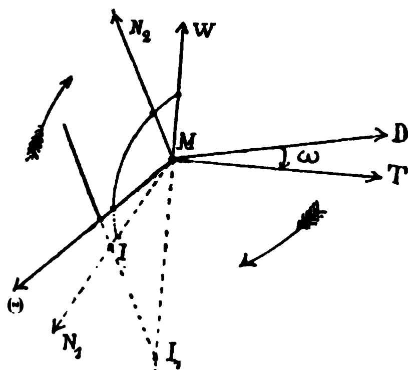



Fig. 38.

« L'axe du cercle osculateur au point M de la courbe Γ passe par le « centre de courbure de la section normale en M tangente à la courbe Γ. »
Tel est le théorème découvert par Meusnier.

## § 3. — *Calcul des deux invariants différentiels en chaque point d'une courbe donnée* Γ

Par définition, l'invariant différentiel P en un point M de Γ est la projection du segment $(mp)$ sur la tangente MT. Donc on a, en conservant les notations précédentes,

$$P = \frac{da}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{db}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{dc}{ds} \cdot \frac{dz}{ds},$$

et, par suite (p. 118),

$$(1) \qquad \frac{\cos \varpi}{R} = \frac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Cherchons maintenant l'expression de l'invariant Q. Les paramètres

directeurs de M$\Theta$ sont (p. 114) :

$$\alpha = -\frac{F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}}{+\sqrt{\Delta}}, \qquad \beta = \frac{E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}}{+\sqrt{\Delta}};$$

d'autre part :

$$Q = \sum \frac{da}{ds}\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

ou (p. 118) :

$$Q = -\alpha\left(E'\frac{du}{ds} + F'\frac{dv}{ds}\right) - \beta\left(F'\frac{du}{ds} + G'\frac{dv}{ds}\right);$$

donc enfin :

$$(2) \qquad \frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds} = \frac{1}{+\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} E'\frac{du}{ds} + F'\frac{dv}{ds} & F'\frac{du}{ds} + G'\frac{dv}{ds} \\ E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} & F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} \end{vmatrix}$$

Remarquons que les seconds membres des formules (1) et (2) ne changent pas si la courbe $\Gamma$ varie de manière à rester tangente en M à MT. En effet, ces seconds membres sont complètement déterminés, si l'on donne les coordonnées $(u, v)$ du point M et les paramètres directeurs superficiels de la tangente MT. Nous obtenons donc une vérification des théorèmes de Meusnier et d'Ossian Bonnet. Nous verrons plus loin des conséquences des formules (1) et (2).

### § 4. — *Courbure et torsion en un point quelconque de la courbe* $\Gamma$

Supposons que les coordonnées d'un point quelconque M de $(\Gamma)$ soient exprimées en fonction de son abscisse curviligne $s$ :

$$(1) \qquad u = \varphi(s), \qquad v = \psi(s),$$

et proposons-nous de calculer la courbure et la torsion au point M. On a vu (p. 57) que la courbure en M est représentée par la dérivée géométrique du segment directeur de la tangente, prise par rapport à $s$. Nous sommes donc conduits à déterminer cette dérivée. A cet effet, nous chercherons ses projections sur MW et M$\Theta$ (*fig.* 38). Ses projections sur O$x$, O$y$, O$z$, sont (p. 57) :

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2};$$

donc celles sur MW et MΘ sont :

$$(2)\quad \frac{\cos \varpi}{R} = \sum a \frac{d^2x}{ds^2} = -\sum \frac{dadx}{ds^2} = \frac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

$$(3)\quad \frac{\sin \varpi}{R} = \sum \frac{d^2x}{ds^2}\left(\alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

La première de ces formules a déjà été obtenue au paragraphe précédent. Transformons la deuxième. En remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs (§ 3), on a :

$$(4)\quad \frac{\sin \varpi}{R} = \frac{1}{-\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \sum \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} & \sum \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \\ E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} & F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} \end{vmatrix}$$

Tout revient à calculer les éléments de la première ligne du déterminant. On a :

$$\sum \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = \sum \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{d^2v}{ds^2}\right] \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Remplaçons les dérivées secondes de $x$, $y$, $z$, par leurs valeurs calculées au moyen des formules (I *bis*) de Gauss; nous obtenons :

$$(5)\quad \sum \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = EM + FN,$$

avec :

$$(6)\quad \begin{cases} M = \frac{d^2u}{ds^2} + \mu\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mu' \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \mu''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \\ N = \frac{d^2v}{ds^2} + \nu\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\nu' \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \nu''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \end{cases}$$

On trouve de même :

$$\sum \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = FM + GN.$$

Donc :

$$\frac{\sin \varpi}{R} = \frac{1}{-\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} EM + FN & FM + GN \\ E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} & F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} \end{vmatrix} = -\sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} M & N \\ \frac{du}{ds} & \frac{dv}{ds} \end{vmatrix}$$

En résumé, nous avons obtenu les formules suivantes :

$$
\text{(III)} \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\cos\varpi}{R} = \frac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},\\
&\frac{\sin\varpi}{R} = -\sqrt{\Delta}\,\frac{Mdv - Ndu}{ds},\\
&\frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds} = \frac{1}{+\sqrt{\Delta}}
\begin{vmatrix}
E'\dfrac{du}{ds} + F'\dfrac{dv}{ds} & F'\dfrac{du}{ds} + G'\dfrac{dv}{ds}\\
E\dfrac{du}{ds} + F\dfrac{dv}{ds} & F\dfrac{du}{ds} + G\dfrac{dv}{ds}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

où M et N sont des fonctione définies par les formules (6).

Les deux premières formules (III) font connaitre en chaque point de $\Gamma$ les éléments $\varpi$, R ; la troisième permet alors de calculer la torsion.

Remarque I. — Considérons toutes les surfaces S :

$$x = f(u, v) \qquad y = g(u, v) \qquad z = h(u, v),$$

qui correspondent à un système donné de fonctions E, F, G, c'est-à-dire les surfaces définies par les équations :

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = F \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G.$$

Ces surfaces ont une définition géométrique que nous aurons à étudier plus tard ; mais signalons dès à présent un théorème remarquable qui est mis en évidence par la deuxième formule (III). Sur chacune des surfaces S, concevons la courbe $\Gamma$, définie par les équations (1). La deuxième formule (III) montre que l'expression $\left(\frac{\sin\varpi}{R}\right)$ ne varie pas quand on passe d'une des surfaces S à une autre ; en effet, le second membre de cette formule est absolument indépendant de E', F', G', et ne dépend que de E, F, G, $\varphi$, $\psi$. Cette expression $\left(\frac{\sin\varpi}{R}\right)$, qui est nulle en chaque point d'une ligne géodésique, a reçu le nom de *courbure géodésique* de la courbe $\Gamma$ au point M.

### § 5. — *Autre expression de la courbure géodésique*

A chaque point M de la surface faisons correspondre une tangente déterminée MD, la loi de correspondance étant définie par les équations :

$$(1) \qquad l = f_1(u, v), \qquad m = g_1(u, v), \qquad n = h_1(u, v),$$

où $l, m, n$, désignent les cosinus directeurs de la tangente MD. On peut, par exemple, supposer que MD coïncide avec la tangente à la ligne de paramètre $(v)$, qui passe par le point M.

Considérons maintenant un point M situé sur la courbe $\Gamma$, et soit $\omega$ (*fig.* 38) l'angle de MD avec la tangente MT.

$$(2) \qquad \omega = \widehat{\mathrm{MD}, \mathrm{MT}}.$$

Lorsque le point M décrit la courbe $\Gamma$, $\omega$ est une fonction bien déterminée de $s$. Supposons cette fonction donnée ; nous allons voir que la formule qui donne la courbure géodésique en M prend une forme particulièrement simple. Différentions à cet effet la relation :

$$(3) \qquad \cos\omega = \sum l \frac{dx}{ds};$$

elle donne :

$$(4) \qquad -\sin\omega \cdot \frac{d\omega}{ds} = \sum l \frac{d^2x}{ds^2} + \sum \frac{dldx}{ds^2}.$$

Or, la projection du segment directeur de MD sur $\mathrm{MN}_1$, c'est-à-dire (*fig.* 38) le cosinus de l'angle de MD avec $\mathrm{MN}_1$, est évidemment $(-\sin\omega \sin\varpi)$; donc la formule précédente devient :

$$(5) \qquad \sin\omega \left(\frac{\sin\varpi}{\mathrm{R}} - \frac{d\omega}{ds}\right) = \frac{\Sigma dldx}{ds^2}.$$

Remarquons que la forme quadratique $\Sigma dldx$ peut être décomposée en facteurs simples du premier degré. En effet :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} dl & dm & dn \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix} = \sum dldx.$$

Soient alors $(l_1, m_1, n_1)$ les cosinus directeurs de la demi-droite $MD_1$ perpendiculaire à MD et telle que :

$$\widehat{MD, MD_1} = +\frac{\pi}{2}.$$

L'identité (6) peut prendre la forme :

$$\sum dldx = \left(\sum l_1 dl\right)\left(\sum l_1 dx\right),$$

et, par suite,

$$\sum dldx = (r_1 du + r_2 dv)\, ds \sin\omega, \tag{7}$$

où $r_1$ et $r_2$ sont définies par l'identité :

$$\sum l_1 dl = r_1 du + r_2 dv. \tag{8}$$

La formule (5) devient, si on y remplace $\sum dldx$ par sa valeur (7) :

$$\frac{\sin\varpi}{R} = \frac{d\omega}{ds} + r_1 \frac{du}{ds} + r_2 \frac{dv}{ds}. \tag{III$^{bis}$}$$

Telle est la formule que nous voulions obtenir.

Remarquons que :

$$r_1 = \sum l_1 \frac{\partial l}{\partial u}, \qquad r_2 = \sum l_1 \frac{\partial l}{\partial v}. \tag{9}$$

*Calcul de $r_1$ et $r_2$.*— Soient $\alpha$, $\beta$, les paramètres directeurs superficiels de la tangente MD ; ces quantités sont des fonctions de $(u, v)$ que l'on a appris à calculer connaissant $l$, $m$, $n$. Nous allons voir que $r_1$ et $r_2$ s'expriment au moyen des fonctions (E, F, G, $\alpha$, $\beta$) et de leurs dérivées et ne dépendent nullement de E', F', G'.

La relation :

$$l = \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v}$$

donne :

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \alpha\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \beta\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.$$

Si l'on tient compte des formules de Gauss ($I^{bis}$), on peut écrire :

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \mu\alpha + \mu'\beta\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \nu\alpha + \nu'\beta\right)\frac{\partial x}{\partial v} + (E'\alpha + F'\beta)\, a\,;$$

par suite :

$$r_1 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \mu\alpha + \mu'\beta\right) \sum l_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \nu\alpha + \nu'\beta\right) \sum l_1 \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Désignons par $\alpha_1$ et $\beta_1$ les paramètres directeurs de $MD_1$ ; on a évidemment :

$$\sum l_1 \frac{\partial x}{\partial u} = E\alpha_1 + F\beta_1,$$

$$\sum l_1 \frac{\partial x}{\partial v} = F\alpha_1 + GB_1;$$

mais on a vu (p. 114) que :

$$\alpha_1 = -\frac{F\alpha + G\beta}{+\sqrt{\Delta}}, \qquad \beta_1 = \frac{E\alpha + F\beta}{+\sqrt{\Delta}};$$

donc :

$$\sum l_1 \frac{\partial x}{\partial u} = -\beta\sqrt{\Delta}. \quad \sum l_1 \frac{\partial x}{\partial v} = \alpha\sqrt{\Delta}.$$

En définitive :

$$r_1 = +\sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \mu\alpha + \mu'\beta & \frac{\partial \beta}{\partial u} + \nu\alpha + \nu'\beta \end{vmatrix}$$

de même, on trouve :

$$r_2 = +\sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \mu'\alpha + \mu''\beta & \frac{\partial \beta}{\partial v} + \nu'\alpha + \nu''\beta \end{vmatrix}$$

# CHAPITRE V

## LIGNES ASYMPTOTIQUES. — LIGNES CONJUGUÉES

### § 1. — *Lignes asymptotiques d'une surface quelconque*

Nous avons vu (p. 132) que pour toutes les courbes Γ, tracées sur la surface S, passant par le point M et admettant en ce point la même tangente, chacune des expressions :

$$\frac{\cos \varpi}{R}, \qquad \frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds},$$

conserve la même valeur. Cette proposition nous conduit à considérer deux catégories particulières de courbes tracées sur S, à savoir :

1° Les courbes telles qu'en chaque point le premier invariant est nul ;
2° » » second »

Les premières sont dites les *lignes asymptotiques* de la surface, les secondes sont les *lignes de courbure*. Ces dénominations seront justifiées plus loin.

Occupons-nous d'abord des premières. La définition que nous venons d'en donner montre que : pour qu'une ligne Γ, tracée sur S, soit une ligne asymptotique, il faut et il suffit qu'elle soit une ligne droite ou bien qu'en chacun de ses points le plan osculateur soit tangent à la surface.

*Équation différentielle.* — Cherchons les lignes asymptotiques :

$$(\Gamma) \qquad u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t),$$

de la surface. On a trouvé (§ 3, p 133) que, en chaque point de Γ,

$$\frac{\cos \varpi}{R} = \frac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2};$$

donc, si on ne précise pas la variable indépendante, l'équation diffé-

rentielle des lignes asymptotiques est :

$$E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2 = 0. \quad (1)$$

Cette équation se décompose en deux réelles ou imaginaires :

$$dv - \alpha du = 0, \qquad dv - \beta du = 0.$$

Il y a donc deux familles (réelles ou imaginaires) de lignes asymptotiques :

$$\varphi(u, v) = a, \qquad \psi(u, v) = b.$$

Par chaque point M de la surface passe une courbe de chaque famille. Les coefficients de direction $\lambda$ et $\mu$ des tangentes en M à ces deux lignes sont évidemment définis par :

$$E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2 = 0.$$

Ces tangentes seront appelées les tangentes asymptotiques de la surface au point M.

Pour que les deux familles de lignes asymptotiques soient confondues, il faut et il suffit que l'on ait identiquement :

$$E'G' - F'^2 = 0;$$

dans ce cas, nous verrons que la surface est développable, les lignes asymptotiques sont alors les génératrices.

Remarque I. — L'équation différentielle (1) ne change pas si on remplace E', F', G' par des quantités proportionnelles. Il est donc inutile, pour appliquer l'équation (1), de calculer les cosinus directeurs de la normale à la surface. On fera le tableau des dérivées des deux premiers ordres :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\partial x}{\partial u}$ | $\frac{\partial x}{\partial v}$ | $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ | $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ | $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ |
| $\frac{\partial y}{\partial u}$ | $\frac{\partial y}{\partial v}$ | $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ | $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ | $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$ |
| $\frac{\partial z}{\partial u}$ | $\frac{\partial z}{\partial v}$ | $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ | $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ | $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ |

On remplacera dans l'équation (1) E' par le déterminant des colonnes 1, 2, 3.

Puis on remplacera dans l'équation (1) F′ par le déterminant des colonnes 1, 2, 4. Puis enfin on remplacera dans l'équation (1) G′ par le déterminant des colonnes 1, 2, 5.

Exemple I. — Supposons la surface S définie par :

$$x = u + v, \qquad y = u^2 + v^2, \qquad z = u^3 + v^3;$$

le tableau précédent se réduit à :

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u & 2v & 2 & 0 & 2 \\ 3u^2 & 3v^2 & 6u & 0 & 6v \end{array}\right|$$

et l'équation des lignes asymptotiques est :

$$du^2 - dv^2 = 0;$$

les deux familles cherchées sont, par suite,

$$u - v = a, \qquad u + v = b;$$

la seconde se compose de lignes droites, la surface est donc une surface gauche.

Exemple II. — Supposons que la surface S soit une surface gauche quelconque :

$$x = x_0 + au, \qquad y = y_0 + bu, \qquad z = z_0 + cu,$$

$x_0$, $y_0$, $z_0$, $a$, $b$, $c$, étant des fonctions de $v$. L'une des familles de lignes asymptotiques se compose de génératrices ; cherchons l'autre. Le tableau des dérivées est ici :

$$\left|\begin{array}{ccccc} a & x_0' + a'u & 0 & a' & x_0'' + a''u \\ b & y_0' + b'u & 0 & b' & y_0'' + b''u \\ c & z_0' + c'u & 0 & c' & z_0'' + b''u \end{array}\right|$$

L'équation différentielle (1), après la suppression du facteur $dv$, prend la forme de Riccati :

$$\frac{du}{dv} = A + Bu + Cu^2,$$

où A, B, C, sont des fonctions de $v$. L'intégrale de cette équation a,

comme on sait, la forme :

$$u = \frac{P + Qa}{R + Sa},$$

P, Q, R, S, étant des fonctions de $v$, et $a$ désignant un paramètre quelconque.

Exemple III. — Le lecteur pourra appliquer la méthode précédente aux surfaces *tétraédrales*, c'est-à-dire aux surfaces définies par :

$$\begin{aligned} x &= A\,(u - a)^m\,(v - a)^m, \\ y &= B\,(u - b)^m\,(v - b)^m, \\ z &= C\,(u - c)^m\,(v - c)^m, \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'équation (1) est intégrable algébriquement. Ce cas d'intégrabilité a été signalé par M. Lie.

Plus généralement les lignes asymptotiques des surfaces définies par des équations de la forme :

$$\begin{aligned} x &= A\,(u - a)^m\,(v - a)^n, \\ y &= A\,(u - b)^m\,(v - b)^n \\ z &= C\,(u - c)^m\,(v - c)^n, \end{aligned}$$

s'obtiennent par quadratures. Ce résultat est dû à M. Darboux (voir *Théorie des Surfaces*, livre I, p. 142).

Enfin, M. Raffy a généralisé encore les résultats précédents et indiqué d'autres cas simples, où l'équation (1) est intégrable par quadratures (voir *Bulletin de la Société Mathématique*, tome XXIV, année 1896).

## § 2. — *Lignes conjuguées*

Soient MT, MT′, deux droites tangentes en M à la surface S. On dit que ces tangentes sont conjuguées, si elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes asymptotiques. Soient $(\lambda, \mu)$ et $(\lambda', \mu')$ les coefficients de direction respectifs des tangentes MT, MT′; la condition pour qu'elles soient conjuguées est (p. 113):

$$(1) \qquad (E'\lambda + F'\mu)\,\lambda' + (F'\lambda + G'\mu)\,\mu' = 0.$$

*Propriété fondamentale des tangentes conjuguées.* — Considérons un arc de courbe *quelconque* MP tangent en M à MT, et soit Σ la dévelop-

pable circonscrite à S suivant cet arc MP. Nous allons voir que : quel que soit l'arc MP, la génératrice de la surface Σ qui passe par M est MT'.

En effet, désignons comme d'habitude par $a$, $b$, $c$, les cosinus directeurs de la normale MW et par MT'' la génératrice de Σ, qui passe par M ; enfin, soient $\lambda''$, $\mu''$, les coefficients de direction superficiels de MT'',

La droite MT'' est l'intersection du plan tangent en M et du plan :

$$(2) \qquad (X - x)\, da + (Y - y)\, db + (Z - z)\, dc = 0,$$

où $d$ désigne les différentielles correspondantes au déplacement de M sur l'arc MP. Donc il en résulte :

$$\sum \left(\lambda'' \frac{\partial x}{\partial u} + \mu'' \frac{\partial x}{\partial v}\right) da = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(3) \qquad \sum \left(\lambda'' \frac{\partial x}{\partial u} + \mu'' \frac{\partial x}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial a}{\partial u} \lambda + \frac{\partial a}{\partial v} \mu\right) = 0.$$

Si on se reporte aux expressions de E', F', G', on voit immédiatement que l'équation (3) peut s'écrire :

$$(E'\lambda + F'\mu)\, \lambda'' + (F'\lambda + G'\mu)\, \mu'' = 0.$$

Donc MT'' se confond avec la tangente MT', conjuguée de MT.

*Systèmes de lignes conjuguées.* — A chaque point M de la surface faisons correspondre une tangente déterminée MT et sa conjuguée MT'. La congruence des droites MT et celle des droites MT' sont dites deux congruences conjuguées.

Considérons maintenant deux familles de courbes :

$$\varphi(u, v) = a,$$
$$\psi(u, v) = b.$$

Si la congruence des tangentes de l'une est conjuguée de la congruence des tangentes de l'autre, les deux familles forment ce que l'on appelle un système de lignes conjuguées ou, par abréviation, un *système conjugué*.

On peut choisir arbitrairement l'une des familles d'un système conjugué, par exemple :

$$\varphi(u, v) = a ;$$

alors l'autre famille est définie par l'équation différentielle :

$$\left(E' \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F' \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) du + \left(F' \frac{\partial \varphi}{\partial v} - G' \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) dv = 0.$$

La construction d'un système conjugué sur une surface *quelconque* semble donc exiger une intégration difficile. La proposition suivante, due à M. Kœnigs, nous montrera qu'il est possible, sans effectuer aucune intégration, de construire une infinité de systèmes conjugués sur une surface absolument quelconque.

*Théorème de M. Kœnigs.* — Les sections de la surface, déterminées « par tous les plans qui contiennent la droite D, admettent pour lignes « conjuguées les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface, « ayant leurs sommets sur cette droite.

En effet soient : M, un point de la surface ; A le point de rencontre de la droite D avec le plan tangent en M ; C, la courbe de contact du cône circonscrit à la surface ayant pour sommet le point A ; et MT, la tangente menée par le point M à la courbe C. La tangente MT a pour conjuguée (propriété fondamentale des tangentes conjuguées) la génératrice MA du cône ; or, cette dernière est aussi la tangente en M à la section faite dans la surface par le plan MAD ; le théorème est donc démontré.

On trouvera des applications de ce théorème dans le *Traité* de M. Darboux (livre I, p. 112).

*Condition pour que les lignes coordonnées forment un système conjugué.* — Les coefficients de directions $(\lambda, \mu)$ des tangentes asymptotiques au point M $(u, v)$ sont définis, comme on a vu, par l'équation :

$$E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2 = 0.$$

Pour que ces tangentes soient conjuguées par rapport aux tangentes MU, MV, il faut et il suffit (V. p. 113) que :

$$F' = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la condition cherchée. Il est clair qu'on peut l'énoncer ainsi (V. *Théorie des Surfaces*, livre I, p. 102) :

« Pour que les lignes coordonnées forment un système conjugué, il « faut et il suffit que les expressions des trois coordonnées rectangulaires « en fonction de $u$ et $v$ satisfassent à une même équation linéaire :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

« où A et B désignent des fonctions quelconques de $u$ et $v$.

Pour les applications de ce théorème, nous renvoyons encore le lecteur à la *Théorie des Surfaces*.

Remarque. — Supposons la condition précédente remplie. Alors les formules de Gauss montrent que:

$$A = \mu', \qquad B = \nu'.$$

# CHAPITRE VI

## LIGNES DE COURBURE. — SECTIONS PRINCIPALES CENTRES DE COURBURE PRINCIPAUX FORMULE D'EULER SURFACES DONT TOUS LES POINTS SONT DES OMBILICS FORMULES D'OLINDE RODRIGUES

---

### § 1. — *Équation différentielle des lignes de courbure*

Nous avons vu (p. 140) qu'en tout point d'une ligne de courbure l'invariant $\frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds}$ est nul. Cette propriété, qui nous a servi pour caractériser les lignes de courbure, a une signification géométrique simple. Elle exprime, en vertu de la théorie des développées (p. 93), que :

« Les normales à la surface aux différents points d'une ligne de cour-
« bure engendrent une surface développable. »

Cherchons les lignes de courbure :

$$(\Gamma) \qquad u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t),$$

de la surface ; nous avons vu que :

$$\frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds} = \frac{1}{+\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} E'\frac{du}{ds} + F'\frac{dv}{ds} & F'\frac{du}{ds} + G'\frac{dv}{ds} \\ E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} & F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} \end{vmatrix}$$

donc, si on ne précise pas la variable indépendante, l'équation différentielle des lignes de courbure est :

$$\frac{E'du + F'dv}{Edu + Fdv} = \frac{F'du + G'dv}{Fdu + Gdv}.$$

Supposons qu'on ait obtenu une ligne de courbure et cherchons en un point M $(u, v)$ de cette courbe le point de contact I de la normale MW avec son enveloppe. La théorie des développées montre que ce point I a pour projection sur le plan osculateur de la courbe $\Gamma$ précisément le centre de courbure de cette courbe; donc si on représente par $\rho$ le *segment* MI

$$MI = \rho,$$

on a :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\varpi}{R} = \frac{E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{E'du + F'dv}{Edu + Fdv} = \frac{F'du + G'dv}{Fdu + Gdv}.$$

*Réalité des lignes de courbure.* — L'équation en $\rho$ :

$$(2) \qquad (E - \rho E')(G - \rho G') - (F - \rho F')^2 = 0,$$

a ses racines *réelles et distinctes*. Il suffit pour le voir de substituer les nombres $\left(0, \frac{E}{E'}, \frac{G}{G'}\right)$ et de remarquer que l'on a essentiellement :

$$EG - F^2 > 0.$$

Il y a exception toutefois si :

$$\frac{E}{E'} = \frac{G}{G'} = \frac{F}{F'};$$

dans ce cas, la surface est, comme nous le verrons, une sphère. Toute courbe tracée sur cette sphère est évidemment une ligne de courbure. Nous écartons ici ce cas particulier.

Il résulte évidemment de là que l'équation en $\frac{dv}{du}$ a ses racines réelles et distinctes. Donc :

Il existe deux familles de lignes de courbure :

$$\varphi(u, v) = a, \qquad \psi(u, v) = b.$$

Ces familles sont toujours réelles. Par chaque point de la surface passe une courbe de chaque famille.

Remarque. — Les normales à la surface engendrent évidemment une congruence Les points focaux $I_1$ et $I_2$ d'une normale MW sont, en

vertu de la théorie des congruences, définis par :

$$MI_1 = \rho_1, \qquad MI_2 = \rho_2,$$

où $\rho_1$ et $\rho_2$ sont les racines de (2). Les plans focaux sont les plans passant par MW, et les tangentes $MT_1$. $MT_2$ aux lignes de courbure qui se croisent en M. Ces plans focaux sont, comme nous allons voir, rectangulaires.

*Orthogonalité des lignes de courbure.* — Soient $(\lambda_1, \mu_1)$ et $(\lambda_2, \mu_2)$ les paramètres superficiels des tangentes $MT_1$, $MT_2$. On a par ce qui précède :

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{E'\lambda_1 + F'\mu_1}{E\lambda_1 + F\mu_1} = \frac{F'\lambda_1 + G'\mu_1}{F\lambda_1 + G\mu_1},$$

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho_2} = \frac{E'\lambda_2 + F'\mu_2}{E\lambda_2 + F\mu_2} + \frac{F'\lambda_2 + G'\mu_2}{F\lambda_2 + G\mu_2}.$$

Ceci posé, en vertu des équations (3), le quotient:

$$\frac{E'\lambda_1\lambda_2 + F'(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + G'\mu_1\mu_2}{E\lambda_1\lambda_2 + F(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_2) + G\mu_1\mu_2}$$

est égal à $\left(\frac{1}{\rho_1}\right)$; mais, en vertu des équations (4), ce même quotient est égal à $\left(\frac{1}{\rho_2}\right)$; or, $\rho_1$ et $\rho_2$ sont distincts, donc le quotient considéré est indéterminé, et on a :

$$E\lambda_1\lambda_2 + F(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + G\mu_1\mu_2 = 0,$$
$$E'\lambda_1\lambda_2 + F'(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + G'\mu_1\mu_2 = 0.$$

La première relation exprime que $MT_1$ et $MT_2$ sont rectangulaires (V. p. 112), ce que nous voulions démontrer. La deuxième exprime que $MT_1$ et $MT_2$ sont deux tangentes conjuguées (p. 113); donc $MT_1$ et $MT_2$ sont les bissectrices des angles formés par les tangentes asymptotiques issues de M.

Conditions pour que les lignes coordonnées soient lignes de courbure. — Il faut et il suffit, pour cela, que les lignes coordonnées forment un système à la fois orthogonal et conjugué. Les conditions cherchées sont donc :

$$F = 0, \qquad F' = 0.$$

§ 2. — *Sections principales. Centres de courbure principaux*

Soient :

M $(u, v)$, un point de la surface ;

MT, une tangente issue du point M ;

$\lambda$, $\mu$, les paramètres directeurs de cette tangente MT ;

I, le centre de courbure de la section normale TMW ;

$\rho$, le rayon de courbure MI de cette section.

Supposons que la tangente MT tourne autour du point M et cherchons pour quelles positions de cette tangente MT le rayon de courbure $\rho$ est maximum ou minimum. En vertu d'une formule fondamentale (p. 133), on a :

$$\frac{1}{\rho} = E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2,$$

avec :

$$1 = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + B\mu^2.$$

Les valeurs maximum et minimum de $\rho$ et les valeurs de $(\lambda, \mu)$ qui leur correspondent sont données par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{E'\lambda + F'\mu}{E\lambda + F\mu} = \dfrac{F'\lambda + G'\mu}{F\lambda + G\mu}, \\ E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 1. \end{array} \right.$$

donc les positions cherchées pour MT sont les tangentes que nous avons désignées par $MT_1$ et $MT_2$.

Les sections normales déterminées par les plans $T_1MW$ et $T_2MW$ sont dites des *sections principales ;* les plans $T_1MW$ et $T_2MW$ sont appelés les *plans principaux* au point M. Ces derniers coïncident (§ 1) avec les plans focaux de la normale, ils sont donc rectangulaires.

Les centres de courbure des sections principales sont appelés les *centres de courbure principaux ;* l'équation qui les détermine montre qu'ils coïncident avec les points focaux de la normale MW.

Les tangentes $MT_1$ et $MT_2$ aux sections principales seront appelées les *tangentes principales*.

Remarque. — Nous avons toujours supposé la direction MW de la normale en M choisie de manière que le trièdre (MU, MV, MW) ait la disposition directe. Il est clair que cette hypothèse n'est pas forcée en

ce qui concerne la formule :

$$\frac{1}{\rho} = E'\lambda^2 + 2F'\lambda\mu + G'\mu^2,$$

car, si on change le sens positif de la normale MW, la valeur $\rho$ du segment MI et les quantités

$$E' = \sum a \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad F' = \sum a \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \qquad G' = \sum a \frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

changent de signe, et la formule subsiste.

## § 3. — *Variation du rayon de courbure d'une section normale Formule d'Euler*

Prenons pour lignes coordonnées les lignes de courbure de la surface ; alors :

$$F = 0 \qquad F' = 0,$$

et la formule qui donne le rayon de courbure $\rho$ de la section normale déterminée par le plan TMW devient .

$$\frac{1}{\rho} = E'\lambda^2 + G'\mu^2$$

avec :

$$1 = E\lambda^2 + G\mu^2.$$

Les rayons de courbure principaux $\rho_1$ et $\rho_2$ ont alors les valeurs simples :

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{E'}{E}, \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{G'}{G};$$

par suite :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{E\lambda^2}{\rho_1} + \frac{G\mu^2}{\rho_2}.$$

Or, les paramètres superficiels s'expriment en fonctions des paramètres ordinaires, pris dans le plan MUV, par les formules (p. 111) :

$$\lambda = \frac{\cos \omega}{+\sqrt{E}}, \qquad \mu = \frac{\sin \omega}{+\sqrt{G}},$$

avec :

$$\omega = \widehat{MU.MT}.$$

donc enfin on a :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \omega}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \omega}{\rho_2}.$$

Cette formule, due à Euler, permet d'étudier la variation de $\rho$ quand MT tourne autour du point M. Nous laisserons au lecteur le soin de faire cette discussion très élémentaire. Remarquons que $\rho$ devient infini quand MT se confond avec une tangente asymptotique.

La formule d'Euler montre immédiatement que le plan tangent traverse la surface au point M, si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont de signes contraires; la conclusion est inverse, si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont de même signe.

### § 4. — *Ombilics. Surfaces dont tous les points sont des ombilics*

On a vu qu'en un point M de la surface les rayons de courbure principaux $\rho_1$ et $\rho_2$ sont distincts, à moins que l'on ait en ce point :

$$(1) \qquad \frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G}.$$

On dit, dans ce dernier cas, que le point M est un *ombilic* de la surface.

Cherchons les surfaces dont tous les points sont des ombilics. Soit S l'une quelconque d'entre elles. Les dérivées des cosinus directeurs $a$, $b$, $c$ de la normale en un point sont données par les formules (p. 121) :

$$\frac{\partial a}{\partial u} + E'a_1 + F'a_2 = 0,$$
$$\frac{\partial a}{\partial v} + F'a_1 + G'a_2 = 0,$$

et les analogues, que l'on obtient par permutation. Mais par hypothèse :

$$E' = -\lambda E, \qquad F' = -\lambda F, \qquad G' = -\lambda G;$$

donc :

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \lambda (Ea_1 + Fa_2),$$
$$\frac{\partial a}{\partial v} = \lambda (Fa_1 + Ga_2),$$

c'est-à-dire si on reporte aux formules qui donnent $a_1$ et $a_2$ :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial u} = \lambda \dfrac{\partial x}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial a}{\partial v} = \lambda \dfrac{\partial x}{\partial v}; \end{cases}$$

de là on tire :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

ou bien :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

On démontre de même que :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Donc :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0;$$

et, par suite,

$$\lambda = C^{te} = \frac{1}{R}.$$

Les formules (2) donnent alors :

$$a = \frac{x - x_0}{R},$$

$x_0$ étant une nouvelle constante. De même :

$$b = \frac{y - y_0}{R}, \qquad c = \frac{z - z}{R}.$$

En portant ces valeurs de $a$, $b$, $c$ dans la relation :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

on voit que les coordonnées $x$, $y$, $z$, d'un point quelconque de la surface satisfont à la relation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Donc la surface est une sphère, comme nous l'avions annoncé (p. 148).

### § 3. — *Formules d'Olinde Rodrigues*

Pour exprimer qu'une courbe $\Gamma$ :

$$(\Gamma) \qquad u = \varphi(t), \qquad v = \psi(t),$$

est une ligne de courbure de la surface, il suffit d'écrire que la normale MW à la surface menée par un point quelconque M de la courbe a une enveloppe quand $t$ varie. Cherchons en partant de là les lignes de courbure de la surface. A chaque point M de ($\Gamma$) faisons correspondre sur la normale MW un point P, tel que :

$$\mathrm{MP} = \rho = \mathrm{F}(t).$$

Le lieu des points P est la courbe $\Gamma_1$ définie par :

$$(\Gamma_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{X} = x + \rho a, \\ \mathrm{Y} = y + \rho b, \\ \mathrm{Z} = z + \rho c. \end{array} \right.$$

La tangente PQ en un point P de ($\Gamma_1$) a pour coefficients de direction :

$$dx + \rho da + a d\rho, \qquad dy + \rho db + b d\rho, \qquad dz + \rho dc + c d\rho.$$

Pour que la ligne $\Gamma$ soit ligne de courbure, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer $\rho$ de manière que les lignes PQ et PM se confondent (quel que soit P), de manière, en d'autres termes, que :

$$\frac{dx + \rho da}{a} = \frac{dy + \rho db}{b} = \frac{dz + \rho dc}{c}.$$

Chacun de ces rapports doit être égal à :

$$\frac{a dx + b dy + c dz}{a^2 + b^2 + c^2} = 0.$$

Donc :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dx + \rho da = 0, \\ dy + \rho db = 0, \\ dz + \rho dc = 0. \end{array} \right.$$

Ces trois équations se réduisent à deux, puisque la combinaison linéaire qui a pour multiplicateurs $a$, $b$, $c$, se réduit à une identité. Si on prend pour variable indépendante $t$ la coordonnée $u$, les équations précédentes définissent $v$ et $\rho$. Les formules (1) sont dues à Olinde Rodrigues ; il y a souvent avantage à les utiliser pour la recherche des lignes de courbure.

On peut en déduire aisément les formules (1) du § 1. En effet :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{da}{dx} = -\frac{db}{dy} = -\frac{dc}{dz},$$

d'où :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sum \frac{\partial x}{\partial u} da}{\sum \frac{\partial x}{\partial u} dx} = -\frac{\sum \frac{\partial x}{\partial v} da}{\sum \frac{\partial x}{\partial v} dx}.$$

Or, les équations qui définissent E, F, G, E′, F′, G′ (p. 118), montrent immédiatement que :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{E'du + F'dv}{Edu + Fdv} = \frac{F'du + G'dv}{Fdu + Gdv}.$$

Remarque. — Des formules (1) on tire :

$$\frac{da}{dx} = \frac{db}{dy} = \frac{dc}{dz}. \tag{2}$$

Ces formules peuvent être démontrées très simplement de la manière suivante. Soient comme d'habitude :

O$m$, le segment directeur de MW ;

M$\Theta$, la normale à la ligne de courbure $\Gamma$ située dans le plan tangent.

La dérivée géométrique de O$m$ par rapport à $t$ est parallèle au plan tangent en M, puisque :

$$ada + bdb + cdc = 0;$$

d'autre part, elle est perpendiculaire à M$\Theta$, en vertu de la définition des lignes de courbure (p. 140) ; donc elle est parallèle à MT, et on a les formules (2).

# CHAPITRE VII

## APPLICATION DES THEORIES PRÉCÉDENTES A QUELQUES SURFACES PARTICULIÈRES THÉOREMES POUVANT SIMPLIFIER LA RECHERCHE DES LIGNES DE COURBURE THÉORÈME DE JOACHIMSTHAL THÉORÈME RELATIF AUX LIGNES DE COURBURE SPHÉRIQUES CLASSE PARTICULIÈRE DE SURFACES DE MONGE

---

### § 1. — *Cônes. Surfaces de révolution*

*Lignes de courbure d'un cône.* — Les génératrices constituent une première famille de lignes de courbure, car les normales en tous les points d'une génératrice sont parallèles, et par suite dans un même plan. La seconde famille se compose des courbes coupant orthogonalement les génératrices, c'est-à-dire des sections du cône donné (S) par des sphères ayant pour centre le sommet O.

*Centres de courbure principaux en un point d'un cône.* — L'un des points focaux de la normale au point M du cône est rejeté à l'infini, c'est celui qui correspond au déplacement du point M sur la génératrice OM. Pour obtenir le second, considérons le plan normal au cône S suivant la génératrice OM; quand cette génératrice varie, le plan normal a pour enveloppe un cône $S_1$ de même sommet que S. Le second centre de courbure principal en M, c'est-à-dire le second point focal de la normale en M, est évidemment le point de contact I de cette normale avec le cône $S_1$.

Soit (C) la ligne de courbure sphérique qui passe par le point M. Si on considère la courbe C comme appartenant à la sphère O de rayon OM, et si on lui applique le théorème de Meusnier, on voit que l'axe du cercle osculateur en M passe par le point O. Si, au contraire, on considère la courbe C comme appartenant au cône S, et si on lui applique encore le théorème de Meusnier, on voit que l'axe passe par le point I. Donc l'axe du cercle osculateur au point M de la courbe C se confond avec

la génératrice OI du cône $S_1$. On peut dire aussi que « la projection du point M sur la droite OI est le centre de courbure de la courbe C au point M ».

On peut retrouver tous les résultats précédents par le calcul ; mais alors il convient de prendre les équations du cône sous la forme (p. 18) :

$$x = u\alpha, \qquad y = u\beta, \qquad z = u\gamma,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sont des fonctions de $v$ satisfaisant à :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Si on a soin de prendre pour variable $v$ l'abscisse curviligne d'un point quelconque de la directrice curviligne, on aura, en outre,

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

*Cône de révolution.* — Supposons le cône S de révolution; alors les lignes de courbure sont les génératrices et les parallèles. Le cône $S_1$ se réduit à une droite qui est l'axe du cône S. Le centre de courbure principal en un point M est le point de rencontre de l'axe avec la normale en M.

*Cône osculateur à un cône donné.* — Considérons de nouveau le cône quelconque S, la génératrice OM et la génératrice correspondante OI sur le cône $S_1$. Concevons le cône de révolution $\Sigma$ qui a pour axe OI et pour génératrice OM ; ce cône $\Sigma$ et le cône S ont en chaque point de OM le même centre de courbure principal. On dit que le cône $\Sigma$ est le cône *osculateur* de S suivant la génératrice OM. Coupons ces deux cônes par un plan quelconque passant par M et normal aux deux cônes. Si on applique la formule d'Euler à ces deux cônes, on aperçoit immédiatement que les deux sections normales ont même cercle osculateur en M. Cette propriété justifie la dénomination du cône $\Sigma$.

*Surfaces quelconques de révolution.* — Les normales à une surface de révolution en tous les points d'un méridien sont dans le plan méridien ; donc les méridiennes forment une famille de lignes de courbure. Les normales en tous les points d'un parallèle rencontrent l'axe au même point ; elles engendrent un cône, c'est-à-dire une surface développable ; donc les parallèles constituent la seconde famille de lignes de courbure.

Les points focaux d'une normale MW sont évidemment son point de rencontre avec l'axe et le centre de courbure en M de la méridienne ; ces points sont aussi, d'après ce que l'on a démontré (p. 150), les centres de courbure principaux de la surface au point M.

### § 2. — *Surfaces développables*

*Lignes de courbure.* — Considérons une surface S développable, mais non conique. Les génératrices constituent une première famille de lignes de courbure, car, en tous les points d'une génératrice, les normales sont parallèles et, par suite, dans un même plan. La seconde famille se compose dès lors des courbes qui coupent orthogonalement les génératrices, c'est-à-dire des développantes de l'arête de rebroussement (p. 94). Ce résultat est d'ailleurs une conséquence du calcul de la forme ($E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$).

Soient :

$$(\Gamma) \qquad x = f(v), \qquad y = g(v), \qquad z = h(v).$$

les équations de l'arête de rebroussement, en supposant que $v$ représente l'abscisse curviligne d'un point quelconque de la courbe. Les équations de la développable sont alors :

$$X = x + u\alpha, \qquad Y = y + u\beta, \qquad Z = z + u\gamma,$$

avec :

$$\alpha = \frac{dx}{dv}, \qquad \beta = \frac{dy}{dv}, \qquad \gamma = \frac{dz}{dv}.$$

Désignons, comme dans la théorie des courbes gauches, par MT, $MN_1$, $MN_2$, les arêtes du trièdre de Serret, relatif au point M ($x$, $y$, $z$) de la courbe ($\Gamma$). Soient :

$$\begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & MT, \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & MN_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & MN_2, \end{array}$$

les neuf cosinus de ce trièdre. On a, en vertu des formules de Serret,

$$dX = \left(\alpha + \frac{u}{R}\alpha_1\right) dv + \alpha du,$$

$$dY = \left(\beta + \frac{u}{R}\beta_1\right) dv + \beta du,$$

$$dZ = \left(\gamma + \frac{u}{R}\gamma_1\right) dv + \gamma du;$$

donc :

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = du^2 + 2du\,dv + \left(1 + \frac{u^2}{R^2}\right) dv^2,$$

c'est-à-dire :

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dU^2 + \frac{(U - V)^2}{R^2} dV^2$$

avec :

$$U = u + v, \qquad V = v ;$$

donc les lignes qui coupent orthogonalement les génératrices sont les lignes :

$$u = -v + C^{te},$$

c'est-à-dire les développantes de l'arête de rebroussement.

*Centres de courbure principaux.* — L'un des centres de courbure principaux au point P ($u$, $v$) est évidemment rejeté à l'infini. Pour obtenir le second, considérons le plan $TMN_2$ normal à la surface suivant la génératrice MP. Ce plan a une enveloppe $\Sigma$ ; sa caractéristique est (p. 96) une droite D passant par M et ayant pour équation :

$$\frac{u}{R} + \frac{\rho}{T} = o ;$$

nous désignons ici par $u$ et $\rho$ les coordonnées d'un point du plan $TMN_2$ par rapport aux axes MT et $MN_2$. Le second centre de courbure principal en P, c'est-à-dire le second point focal de la normale en P, est évidemment le point de contact I de cette normale avec $\Sigma$, c'est-à-dire le point où cette normale rencontre la droite D. Le rayon de courbure principal au point P a donc pour valeur (en grandeur et en signe) :

$$\rho = -\frac{T}{R} u.$$

La droite D est le lieu des centres de courbure principaux aux différents points de la génératrice issue de M.

*Autre méthode pour calculer* $\rho$. — On peut aussi obtenir $\rho$ en appliquant l'équation aux rayons de courbure principaux :

$$(E - \rho E')(G - \rho G') - (F - \rho F')^2 = o.$$

Il suffit d'y remplacer E, F, G, E', F', G', par leurs valeurs. Nous venons de trouver que :

$$E = 1, \qquad F = 1, \qquad G = 1 + \frac{u^2}{R^2}.$$

Reste à calculer E', F', G'. Remarquons, à cet effet, que la normale

en un point P $(u, v)$ est parallèle à la binormale $MN_2$; choisissons donc comme direction positive de la normale au point P la direction $MN_2$ (V. *Rem.*, p. 150). Dans ces conditions :

$$E' = \sum \alpha_2 \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \qquad F' = \sum \alpha_2 \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \qquad G' = \sum \alpha_2 \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}.$$

On trouve aisément à l'aide des formules de Serret :

$$E' = 0, \qquad F' = 0.$$

Ce résultat est évident *a priori*, si on remarque que l'équation des lignes asymptotiques doit se réduire à (p. 141):

$$dv^2 = 0.$$

Quant à l'expression de G', on peut l'écrire :

$$G' = \sum \alpha_2 \left[\frac{\alpha_1}{R} + \frac{u}{R} \cdot \frac{d\alpha_1}{dv} - \frac{u\alpha_1}{R^2} \cdot \frac{dR}{dv}\right],$$

ou bien :

$$G' = \frac{u}{R} \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dv} = -\frac{u}{R} \sum \left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha_2}{T}\right) \alpha_2 = -\frac{u}{RT}.$$

En résumé :

$$E = 1, \qquad F = 1, \qquad G = 1 + \frac{u^2}{R^2},$$

$$E' = 0, \qquad F' = 0, \qquad G' = -\frac{u}{RT}.$$

L'équation en $\rho$ donne alors :

$$\rho G' = G - 1 = \frac{u^2}{R^2},$$

et, par suite,

$$\rho = -\frac{T}{R} u,$$

ce qui est bien le résultat déjà obtenu par un autre procédé.

## § 3. — *Surfaces du second degré*

Considérons une surface à centre (S).

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0. \tag{1}$$

Choisissons pour coordonnées superficielles $(u, v)$ d'un point M $(x, y, z)$ de la surface les racines de l'équation en $\lambda$ :

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}-1=0. \tag{2}$$

Dans ces conditions, les lignes coordonnées qui se croisent en M sont les intersections de la surface avec les deux surfaces homofocales à S et passant par le point M. Les expressions de $x^2$, $y^2$, $z^2$ en fonction de $u$, $v$ sont :

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{A(A-u)(A-v)}{(A-B)(A-C)}, \\ y^2 &= \frac{B(B-u)(B-v)}{(B-C)(B-A)}, \\ z^2 &= \frac{C(C-u)(C-v)}{(C-A)(C-B)}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les équations (3) mettent en évidence que :

$$\sum \frac{x^2}{(A-u)(A-v)}=0, \tag{4}$$

$$\sum \frac{x^2}{A(A-u)(A-v)}=0. \tag{5}$$

Cherchons les conséquences géométriques de ces identités. En différentiant les équations (3) on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} 2\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{x}{A-u}&=0, \\ 2\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{x}{A-v}&=0, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

et quatre équations analogues. De là on tire :

$$4\sum \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}=\sum \frac{x^2}{(A-u)(A-v)}=0.$$

Ainsi on a :

$$F = 0,$$

c'est-à-dire que les lignes coordonnées forment un système orthogonal. En différentiant les relations (6) on obtient :

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{x}{(A - u)(A - v)}.$$

Donc l'identité (5) équivaut à la suivante :

$$\sum \frac{x}{A} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0,$$

et exprime que la droite, issue de M $(x, y, z)$, ayant pour coefficients de direction :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

est située dans le plan tangent en M. Donc :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

En résumé, les identités (4) et (5) nous conduisent aux suivantes :

$$F = 0, \qquad F' = 0;$$

donc les lignes coordonnées sont les *lignes de courbure* de la surface (p. 149).

## § 4. — *Théorème de Joachimsthal*

La recherche des lignes de courbure d'une surface dépend, comme nous l'avons vu, de l'intégration de l'équation :

$$\frac{E'du + F'dv}{Edu + Fdv} = \frac{F'du + G'dv}{Fdu + Gdv}.$$

Nous allons étudier une proposition qui peut souvent faciliter cette intégration.

*Théorème de Joachimsthal.* — Si deux surfaces se coupent sous un angle constant en tous les points d'une ligne (C) et si celle-ci est une ligne de courbure pour la première surface, elle est aussi une ligne de courbure pour la seconde.

En effet, soient :

M, un point de la courbe C ;

$s$, son abscisse curviligne ;

$\frac{1}{T}$, la torsion en ce point,

$\varpi$, et $\varpi_1$, les angles de la normale principale avec les normales aux deux surfaces menées par le point M.

Les hypothèses faites sur C se traduisent ainsi :

$$\frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds} = 0,$$

$$\varpi - \varpi_1 = C^{te}$$

donc :

$$\frac{1}{T} - \frac{d\varpi_1}{ds} = 0,$$

et la proposition est démontrée.

La réciproque est évidente : si deux surfaces ont une ligne de courbure commune, elles se coupent sous le même angle en tous les points de cette courbe.

Remarque. — Toute ligne plane est une ligne de courbure de son plan et toute ligne tracée sur une sphère est une ligne de courbure de cette sphère. Donc :

Si un plan ou une sphère coupe une surface sous un angle constant tout le long d'une ligne, celle-ci est une ligne de courbure de la surface.

Nous verrons à l'instant une application de cette proposition.

## § 3. — *Théorème sur les lignes de courbure sphériques*

Soit donnée une surface S. Supposons que les lignes de courbure de la première famille soient situées sur des sphères ayant pour centre le même point O. Proposons-nous d'étudier la nature des lignes de courbure de la deuxième famille.

Prenons pour lignes coordonnées les lignes de courbure de la surface. Dans ces conditions (p. 149), on a :

$$F = 0, \qquad F' = 0,$$

c'est-à-dire :

(1) $$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

(2) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} &= A\frac{\partial y}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Supposons que les lignes de paramètre $(u)$ soient situées sur des sphères ayant pour centre le point O, c'est-à-dire que la tangente en un point quelconque M d'une de ces lignes soit perpendiculaire au rayon vecteur OM. Alors, si on prend le point O pour origine des coordonnées $(x, y, z)$, on a :

(3) $$\sum x \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Ceci posé : différentions par rapport à $u$ l'équation (3), nous obtenons :

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \sum x\left(A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

(4) $$A = 0,$$

car on ne peut avoir :

$$\sum x \frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

sinon la surface S serait une sphère ; nous écartons évidemment ce cas particulier.

Différentions maintenant la relation (1) par rapport à $u$ ; cette opération donne :

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + A\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + B\sum\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire :

(5) $$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Des équations (1), (3) et (5) on tire évidemment :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation montre que les fonctions $x$, $y$, $z$ de $u$ et $v$ sont liées par une équation de la forme :

$$px + qy + rz = 0,$$

$p$, $q$, $r$, étant uniquement des fonctions de $v$. Donc :

Les lignes de paramètre ($v$) sont des courbes planes. Le plan de chacune d'elles passe par le point O.

Soit M un point quelconque d'une ligne de paramètre ($v$). La tangente MU, la normale MW à la surface, et le rayon recteur OM sont dans le plan perpendiculaire à MV. Donc le plan OMU, qui est le plan de la courbe considérée, est normal en M à la surface S. Ainsi, le plan d'une ligne de paramètre ($v$) est normal à la surface S en tous les points de cette ligne. On peut dire que les lignes de paramètre $v$ sont des lignes géodésiques de la surface (V. p. 30). Nous arrivons donc à cette proposition :

Théorème. — « Lorsque, sur une surface S, les lignes de courbure « d'une famille sont situées sur des sphères ayant pour centre le même « point O, les lignes de courbure de la seconde famille sont situées dans « des plans passant par l'origine. Chacun de ces plans est normal à la « surface S tout le long de la ligne de courbure qu'elle contient ; en « d'autres termes, les lignes de courbure planes de la surface sont pour « celle-ci des lignes géodésiques. »

## § 6. — *Classe particulière de surfaces de Monge*

Les théorèmes précédents vont nous permettre de déterminer une solution nouvelle du problème suivant, résolu par Monge (V. *Applications d'Analyse et de Géométrie*, p. 246).

Problème. — Trouver les surfaces dont les normales sont tangentes à une sphère donnée Σ de centre O et de rayon $a$.

Concevons une surface S satisfaisant à la question, et soit MW la nor-

male en un point quelconque M de cette surface. Cherchons d'abord la nature des lignes de courbure de S, qui se croisent au point M (*fig.* 40).

FIG. 40.

Le plan OMW coupe la sphère suivant un grand cercle (*c*) tangent en P à la droite MW. Il est clair que le triangle OMP reste constant, si le point M se meut sur la surface de manière que :

$$OM = C^{te};$$

la sphère de centre O et de rayon OM coupe donc la surface S suivant un angle constant tout le long d'une ligne (C). Donc, en vertu du théorème de Joachimsthal (V. *Rem.*, p. 163), la ligne C est une ligne de courbure. D'autre part, le théorème que nous venons de démontrer au sujet des lignes de courbure sphériques prouve que la section (Γ) de la surface S par le plan OMW est la seconde ligne de courbure de S qui passe par le point M. Les normales à la courbe Γ étant normales à la surface (§ 5), il en résulte que Γ est une développante du cercle (*c*).

Ceci posé, soit A le sommet de la développante, et soit (T) le cône décrit par la droite OA quand Γ coïncide successivement avec toutes les lignes de courbure planes de la surface S; je dis que le plan de la courbe Γ est constamment normal au cône T. En effet, la tangente AB au lieu géométrique du point A est perpendiculaire à la tangente AA′ au cercle (*c*), puisque celle-ci est normale à la surface S au point A; d'autre part, AB est perpendiculaire au rayon OA, donc elle est perpendiculaire au plan OMW. Donc, enfin, le plan OMW est normal au cône T suivant la génératrice OA, ce que nous voulions démontrer.

Ces remarques vont nous conduire à une génération simple de la surface S.

Considérons la figure invariable formée par le cercle (*c*), la courbe Γ et la droite OA. Supposons que la droite OA décrive le cône T et que le plan de la courbe Γ reste constamment *normal* au cône T; dans ces conditions, la courbe Γ décrit la surface S.

Réciproquement, quel que soit le cône T, décrit par la droite OA, la surface engendrée par la courbe Γ est une surface S satisfaisant à la question. En effet, soit $m$ la projection d'un point M de Γ sur la droite OA. Dans le mouvement de la figure plane, la droite M$m$ reste constamment normale au cône T ; d'autre part :

$$Mm = C^{te} ;$$

donc la trajectoire du point M est orthogonale à M$m$ (formule (I) relative à la variation d'un segment). D'autre part, cette trajectoire est évidemment orthogonale à OM ; donc, enfin, elle est orthogonale au plan de la courbe Γ et en particulier à la tangente MP. Celle-ci étant normale à deux courbes de la surface se croisant en M est normale à la surface, et la proposition est démontrée.

*Équations générales de la surface S.* — Soient :

$$x = u\alpha, \qquad y = u\beta, \qquad z = u\gamma,$$

les équations du cône T, sous la forme que nous choisissons ordinairement. Rappelons que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sont des fonctions de $v$, telles que :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$
$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Dans ces conditions, les cosinus directeurs de la normale en un point quelconque (1, $v$) de la directrice du cône sont :

$$\beta\gamma' - \gamma\beta', \qquad \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \qquad \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Soit OW cette direction. Les équations de la développante Γ dans le plan AOW sont :

$$\text{(M)} \qquad \begin{cases} \xi = a(\cos t + t \sin t), \\ \eta = \pm a(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

quand on prend pour axe des $\xi$ la droite OA et pour axe des $\eta$ la direction OW.

Pour trouver les équations de la surface S, il suffit de projeter le contour O$m$M sur les trois axes, ce qui donne :

$$\begin{cases} X = \alpha\xi + (\beta\gamma' - \gamma\beta')\eta, \\ Y = \beta\xi + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')\eta, \\ Z = \gamma\xi + (\alpha\beta' - \beta\alpha')\eta. \end{cases}$$

On obtient ainsi les expressions de coordonnées $x$, $y$, $z$, en fonction de deux variables $t$ et $v$.

### § 7. — *Remarques relatives au cas où les variables indépendantes sont $x$ et $y$*

Lorsqu'une surface est définie par l'équation :

$$z = f(x, y),$$

on peut lui appliquer toutes les formules établies ; il suffit, en effet, de supposer :

$$u = x, \qquad v = y.$$

Proposons-nous de calculer les six fonctions E, F, G, E′, F′, G′. D'abord :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (pdx + qdy)^2),$$

où :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y};$$

donc :

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2.$$

D'autre part, les cosinus directeurs $a$, $b$, $c$, de la normale sont :

$$a = \frac{-p}{+\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \; b = \frac{-q}{+\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \; c = \frac{1}{+\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Donc, si on pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

on a :

$$E' = \frac{r}{+\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \; F' = \frac{s}{+\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \; G' = \frac{t}{+\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

# CHAPITRE VIII

## ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES GÉODÉSIQUES
## FORME DE LAGRANGE
## CONGRUENCES DE NORMALES
## THÉORÈME DE MALUS ET DUPIN
## AUTRE MÉTHODE POUR OBTENIR LES LIGNES GÉODÉSIQUES
## THÉORÈME DE JACOBI

---

### § 1. — *Équation différentielle des lignes géodésiques*

Une ligne $\Gamma$, tracée sur une surface S, est dite une ligne géodésique de cette surface, si, en chaque point, on a, en conservant les notations des leçons précédentes,

$$\frac{\sin \varpi}{R} = 0.$$

Pour que la ligne $\Gamma$ soit ligne géodésique, il faut donc et il suffit que la ligne $\Gamma$ soit une ligne droite ou bien qu'en chacun de ses points le plan osculateur soit normal à la surface. On voit qu'en chaque point d'une ligne géodésique curviligne la normale principale coïncide avec la normale à la surface. Cherchons à déterminer toutes les lignes géodésiques de la surface.

On a vu (p. 136) qu'en chaque point d'une ligne $\Gamma$ de la surface on a :

$$(1) \qquad \frac{\sin \varpi}{R} = -\sqrt{\Delta}\left(M\frac{dv}{ds} - N\frac{du}{ds}\right),$$

avec :

$$(2) \qquad M = \frac{d^2u}{ds^2} + \mu\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mu'\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} + \mu''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$(3) \qquad N = \frac{d^2v}{ds^2} + \nu\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\nu'\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} + \nu''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2;$$

donc, pour que la ligne $\Gamma$ soit une ligne géodésique, il faut et il suffit

que l'on ait en chaque point :

$$M \frac{dv}{ds} - N \frac{du}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(4) \quad \frac{du}{ds} \cdot \frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{dv}{ds} \cdot \frac{d^2 u}{ds^2} = \begin{vmatrix} \mu \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mu' \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \mu'' \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 & \frac{du}{ds} \\ \nu \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\nu' \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \nu'' \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 & \frac{dv}{ds} \end{vmatrix}$$

Cette équation a une propriété remarquable : elle ne change pas de forme si on change la variable indépendante. Si, en effet, on pose :

$$s = \varphi(t),$$

l'équation (4) prend la forme :

$$(5) \quad \frac{du}{dt} \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{dv}{dt} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mu \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\mu' \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + \mu'' \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 & \frac{du}{dt} \\ \nu \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\nu' \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + \nu'' \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 & \frac{dv}{dt} \end{vmatrix}$$

En particulier si :

$$t = u,$$

cette équation devient :

$$\frac{d^2 v}{du^2} = \begin{vmatrix} \mu + 2\mu' \frac{dv}{du} + \mu'' \left(\frac{dv}{du}\right)^2 & 1 \\ \nu + 2\nu' \frac{dv}{du} + \nu'' \left(\frac{dv}{du}\right)^2 & \frac{dv}{du} \end{vmatrix}$$

Telle est l'équation différentielle des lignes géodésiques. Elle montre que ces lignes forment une famille à deux paramètres $(a, b)$ :

$$v = F(u, a, b).$$

Application. — Étant données les équations :

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

d'une surface S, avec la condition :

$$F = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes coordonnées de paramètre $(v)$ soient des lignes géodésiques.

Il suffit de chercher à quelle condition l'équation (5) est vérifiée pour

$$v = \text{const.}, \qquad u = \varphi(t).$$

Or, on voit immédiatement que la condition cherchée est :

$$\nu = 0,$$

mais les équations qui déterminent $\mu\nu$ sont ici (p. 123) et :

$$E\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} \qquad G\nu = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v};$$

donc la condition précédente équivaut à :

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad \text{ou :} \qquad E = \varphi'^2(u).$$

*Système particulier de lignes coordonnées.* — Supposons que sur une surface S on connaisse une famille de lignes géodésiques à un paramètre $(a)$ :

$$\varphi(u,v) = a,$$

ainsi que les courbes (p. 115) :

$$\psi(u,v) = b,$$

qui les coupent orthogonalement. Ces dernières sont dites les *parallèles* correspondant à la famille de géodésiques considérée. Prenons pour nouvelles coordonnées des points de la surface les quantités $u_1$ et $v_1$ définies par :

$$u_1 = \psi(u, v) \qquad v_1 = \varphi(u, v).$$

Il est clair que le réseau des nouvelles lignes coordonnées se compose de géodésiques et des parallèles correspondants. Le $(ds^2)$ de la surface prend alors la forme :

$$ds^2 = \varphi'^2(u_1)\,du_1^2 + \rho^2 dv_1^2.$$

Faisons encore le changement :

$$u = \varphi(u_1), \qquad v = v_1,$$

qui n'altère évidemment pas les lignes coordonnées; le $(ds^2)$ prend alors la forme simple :

$$ds^2 = du^2 + \rho^2 dv^2 \qquad \rho^2 = G(u, v).$$

Dans beaucoup de questions relatives à la surface donnée, il y a avantage à employer le système de coordonnées que nous venons de définir.

## § 2. — *Cas où s est la variable indépendante*

Cherchons les équations :

$$u = \varphi(s) \qquad v = \psi(s),$$

d'une ligne géodésique, en supposant que la variable indépendante est l'abscisse curviligne $s$ d'un point quelconque de la courbe. Exprimons, à cet effet, que la normale principale de la courbe est normale à la surface, ce qui donne :

$$\sum \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

En transformant les premiers membres, comme nous l'avons fait déjà (p. 135), on voit que les équations précédentes peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} EM + FN &= 0 \\ FM + GN &= 0; \end{aligned}$$

il en résulte que les fonctions $(u, v)$ cherchées sont définies par les équations :

$$M = \frac{d^2u}{ds^2} + \mu\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mu' \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \mu''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0,$$
$$N = \frac{d^2v}{ds^2} + \nu\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\nu' \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \nu''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0,$$

auxquelles il faut adjoindre la suivante :

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1.$$

Nous allons appliquer ces formules à un cas particulier.

## § 3. — *Lignes géodésiques d'une surface de révolution*

Nous choisirons pour coordonnées $(u, v)$ d'un point celles qui ont été définies plus haut (p. 107); alors :

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = r^2, \qquad r = \varphi(u);$$

il en résulte pour les couples $(m, n)$ les valeurs suivantes (p. 123) :

$$m = 0, \quad m' = 0, \quad m'' = -r\frac{dr}{du},$$
$$n = 0, \quad n' = r\frac{dr}{du}, \quad n'' = 0$$

et, par suite :

$$\mu = 0, \quad \mu' = 0, \quad \mu'' = -r\frac{dr}{du}.$$
$$\nu = 0, \quad \nu' = \frac{1}{r}\frac{dr}{du}, \quad \nu'' = 0.$$

Le système précédent (§ 2) donne alors :

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{ds^2} - r\frac{dr}{du}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} = 0,$$

$$(3) \qquad \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1.$$

L'équation (2) donne :

$$r^2\frac{d^2v}{ds^2} + 2r\frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{ds}\cdot\frac{dv}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{dv}{ds}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$(4) \qquad r^2\frac{dv}{ds} = a,$$

$a$ étant une constante. L'équation (3) donne alors :

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2} = 1,$$

$$\frac{rdu}{\sqrt{r^2 - a^2}} = ds = \frac{r^2}{a} dv.$$

Donc, enfin, l'équation des lignes géodésiques est :

$$\int_0 \frac{adu}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = v + b.$$

REMARQUE. — L'équation :

(4) $$r^2 \frac{dv}{ds} = a$$

a une interprétation géométrique fort simple. Soit MT la tangente en un point M d'une ligne géodésique et :

$$\omega = \widehat{MU, MT}.$$

Les projections du segment $ds$ sur MU et MV sont (p. 106) respectivement $du$ et $rdv$; donc :

$$du = ds \cos\omega, \qquad rdv = ds \sin\omega;$$

l'équation (3) exprime donc que :

« En chaque point d'une géodésique d'une surface de révolution, le « produit du rayon du parallèle et du sinus de l'inclinaison de la géodé- « sique sur le méridien est constant. »

## § 4. — *Forme donnée par Lagrange aux équations différentielles des lignes géodésiques*

Cherchons comme au § 2 les équations :

(1) $$u = \varphi(s), \qquad v = \psi(s),$$

d'une ligne géodésique en supposant que la variable indépendante est l'abscisse curviligne $s$ d'un point quelconque de la courbe. En exprimant que la normale principale en un point de la courbe (1) est la normale à la surface, on trouve :

$$(2) \qquad \sum \frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad\qquad \sum \frac{d^2x}{ds}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} = 0. \qquad (3)$$

Au lieu d'appliquer les formules de Gauss à la transformation de ces équations, comme nous l'avons déjà fait, nous allons employer un artifice dû à Lagrange. On a évidemment :

$$\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

ou, en employant la notation de Lagrange,

$$x''\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{d}{ds}\left(x'\frac{\partial x}{\partial u}\right) - x'\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}u' + \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}v'\right).$$

Ceci posé, considérons pour un instant :

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v'$$

comme une fonction de quatre variables indépendantes $u, v, u', v'$ ; dans ces conditions :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}u' + \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}v' = \frac{\partial x'}{\partial u};$$

donc :

$$x''\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{d}{ds}\left(x'\frac{\partial x}{\partial u}\right) - x'\frac{\partial x'}{\partial u}.$$

Posons maintenant :

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2.$$

Si on considère T comme fonction de quatre variables indépendantes $u$, $v$, $u'$, $v'$, on peut écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \sum x'\frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}u'v' + \frac{\partial G}{\partial u}v'^2\right],$$

et, par suite, l'équation (2) peut s'écrire :

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = 0.$$

En résumé, les fonctions cherchées sont définies par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = 0, \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} = 0, \end{aligned}\right. \qquad 2T = 1.$$

Remarque I. — Le calcul précédent indique un moyen rapide de calculer les quantités $m$, $n$ de Gauss. On a en effet (p. 172) identiquement :

$$\sum \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial x}{du} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = Eu'' + Fv'' + mu'^2 + 2m'u'v' + m''v'^2,$$

$$\sum \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} = Fu'' + Gv'' + nu'^2 + 2n'u'v' + n''v'^2,$$

Remarque II. — On vérifiera comme plus haut (p. 170) que l'équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} & \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} \\ \frac{\partial T}{\partial u'} & \frac{\partial T}{\partial v'} \end{vmatrix} = 0$$

définit les lignes géodésiques, *quelle que soit* la variable indépendante $s$.

## § 5. — *Congruences de normales. Théorème de Malus et Dupin*

Nous allons étudier quelques propriétés des congruences de normales, qui sont fort utiles dans la théorie des lignes géodésiques.

Problème. — Soit donnée la congruence définie par :

$$(1) \qquad X = x + a\rho, \qquad Y = y + b\rho, \qquad Z = z + c\rho,$$

où $x, y, z, a, b, c$ sont des fonctions de deux variables $u$ et $v$, telles que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces droites soient normales à une même surface.

A chaque droite D de la congruence faisons correspondre un point déterminé M, la loi de correspondance étant définie par :

$$\rho = \varphi(u, v).$$

Le lieu des points M est une surface S définie par les équations (1), où $\rho$ est supposée remplacée par sa valeur $\varphi(u, v)$. Le problème proposé nous conduit à cet autre : déterminer $\varphi$ de manière que les droites D soient normales à S. Les équations de ce dernier problème sont évidemment :

$$\sum a \frac{\partial X}{\partial u} = 0, \qquad \sum a \frac{\partial X}{\partial v} = 0.$$

On peut les condenser en écrivant :

$$(2) \qquad \sum a dX = 0.$$

Or :

$$dX = dx + a d\rho + \rho da;$$

donc l'équation (2) devient :

$$\Sigma a dx + d\rho = 0.$$

Pour que les droites D soient normales à une même surface, il faut donc et il suffit que la forme $(adx + bdy + cdz)$ à deux variables $u$ et $v$ soit une différentielle exacte $d\theta$ :

$$adx + bdy + cdz = d\theta.$$

Si cette condition est vérifiée, les droites D sont normales à une famille de surfaces parallèles, à savoir les surfaces (1), où :

$$\rho = -\theta + C^{te}.$$

*Théorème de Malus et Dupin.* — « Pour que les droites d'une congruence « soient normales à une même surface, il faut et il suffit que les plans « focaux correspondant à une droite quelconque de la congruence soient « rectangulaires. »

Nous avons déjà vu (p. 149) que la condition est nécessaire; démontrons qu'elle est suffisante. A cet effet, coupons la congruence par une

surface S quelconque et prenons pour lignes coordonnées de S les traces des développables de la congruence. Soient alors :

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

les équations de S. Désignons par $(a, b, c)$ les cosinus directeurs de la droite D qui passe par le point M $(u, v)$; il résulte du choix des lignes coordonnées que l'on a (p. 12) identiquement :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Ceci posé, les plans focaux passant par D sont les plans passant par D et les tangentes MU, MV, aux lignes coordonnées. Admettons que ces plans soient rectangulaires quelle que soit la droite D. Nous allons voir que les droites D sont normales à une même surface.

En effet, considérons la droite MN qui a pour coefficients de direction :

$$\frac{\partial a}{\partial u}, \quad \frac{\partial b}{\partial u}, \quad \frac{\partial c}{\partial u};$$

cette droite est perpendiculaire à D, car :

$$a\frac{\partial a}{\partial u} + b\frac{\partial b}{\partial u} + c\frac{\partial c}{\partial u} = 0 ;$$

d'autre part, elle est située dans le plan focal DMU en vertu de l'identité (1); donc elle est perpendiculaire au plan DMV et en particulier à la droite MV. Ainsi on a :

$$(3) \qquad \sum \frac{\partial a}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

On démontre que :

$$(4) \qquad \sum \frac{\partial a}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Les relations (3) et (4) peuvent s'écrire :

$$(3') \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\sum a \frac{\partial x}{\partial v}\right) = \sum a \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},$$

$$(4') \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\sum a \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \sum a \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}.$$

Posons :

$$adx + bdy + cdz = pdu + qdv.$$

Les relations (3′) et (4′) donnent alors :

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u};$$

donc la forme $(adx + bdy + cdz)$ est une différentielle exacte, et les droites D sont normales à une même surface.

Corollaire. — Les tangentes aux géodésiques d'une famille à un paramètre sont normales à une même surface.

En effet, soient : Γ une géodésique de la famille considérée et MT une de ses tangentes. La théorie des congruences (p. 40) montre immédiatement que les plans focaux relatifs à MT sont, d'une part, le plan tangent à la surface au point M et le plan osculateur de la courbe Γ au même point M. Or, ces deux plans sont rectangulaires ; donc les tangentes MT sont normales à une même surface. Nous allons montrer une application de cette proposition.

### § 6. — *Surfaces dont les normales sont tangentes à une surface donnée* S

Proposons-nous de déterminer une surface Σ dont les normales soient tangentes à la surface donnée S. Ce problème peut évidemment être énoncé ainsi :

*Déterminer une congruence* (E) *de droites tangentes à la surface* S *et normales à une autre surface* Σ *(non donnée). Trouver les équations de cette dernière.*

Pour résoudre cette question, prenons pour inconnues les courbes Γ tracées sur S, dont les tangentes appartiennent à la congruence cherchée E. Ces courbes Γ forment une famille à un paramètre (p. 114), et la première partie du problème sera résolue, si on sait déterminer cette famille. Démontrons d'abord que :

*Les courbes* Γ *sont des géodésiques de la surface* S. — En effet, les plans focaux relatifs à une tangente quelconque MT d'une courbe Γ sont rectangulaires, en vertu du théorème de Malus et Dupin ; mais ces plans sont, d'une part, le plan tangent en M à la surface S, et, d'autre part, le plan osculateur à la courbe Γ au même point M ; donc ce plan osculateur est normal à la surface S, et la ligne Γ est une géodésique.

On a vu que réciproquement les tangentes aux géodésiques d'une famille à un paramètre sont normales à une même surface. Donc toute congruence E satisfaisant à la question se compose des tangentes d'une famille de géodésiques à un paramètre. On voit que cette solution nécessite la détermination des lignes géodésiques de la surface S.

Cherchons maintenant la surface $\Sigma$ qui correspond à une congruence (E). A cet effet, prenons pour lignes coordonnées de la surface S, d'une part, les lignes géodésiques dont les tangentes constituent la congruence (E) et, d'autre part, les parallèles correspondants. Dans ces conditions, le $(ds^2)$ de la surface peut être mis sous la forme (p. 171) :

$$ds^2 = du^2 + \rho^2 dv^2, \qquad \rho^2 = G(u, v).$$

Les cosinus directeurs d'une droite de la congruence sont :

$$a = \frac{\partial x}{\partial u} \qquad b = \frac{\partial y}{\partial u} \qquad c = \frac{\partial z}{\partial u},$$

et on a l'identité :

$$adx + bdy + cdz = du ;$$

donc (§ 5) il y a une infinité de surfaces $\Sigma$, correspondant à la congruence E ; ce sont les surfaces parallèles définies par :

$$X = x - (u + K)\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$Y = y - (u + K)\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$Z = z - (u + K)\frac{\partial z}{\partial u},$$

où K désigne une constante quelconque. Remarquons que pour chacune de ces surfaces les lignes de paramètre $(v)$ sont des lignes de courbure.

Si on applique la méthode précédente à la recherche des surfaces $\Sigma$, dont les normales sont tangentes à une sphère donnée, on retrouvera la solution déjà obtenue par un autre procédé (p. 165).

### § 7. — *Autre méthode pour obtenir les lignes géodésiques*

Nous venons de voir que :

1° A toute congruence de droites tangentes à S et normales à une

autre surface correspond une famille déterminée de géodésiques à un paramètre, à savoir les géodésiques dont les tangentes appartiennent à la congruence ;

2° A toute famille de géodésiques à un paramètre correspond une congruence de droites normales à une surface, à savoir la congruence formée par les tangentes à ces géodésiques.

Donc, si on peut déterminer directement les congruences de droites tangentes à S et normales à une autre surface, on saura déterminer sel lignes géodésiques de S.

Nous allons développer cette méthode.

Soient :

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v),$$

les équations de la surface S, et :

$$\lambda = \varphi(u, v), \qquad \mu = \psi(u, v), \qquad E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 1,$$

celles qui définissent (p. 115) la congruence cherchée. Pour déterminer $\lambda$ et $\mu$, nous appliquerons la condition trouvée au § 3 de ce chapitre. A cet effet, considérons la droite de la congruence qui passe par le point M $(u, v)$ de la surface S. Les cosinus directeurs $a$, $b$, $c$, de cette droite sont donnés par :

$$a = \lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad b = \lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad c = \lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v},$$

donc la forme $(adx + bdy + cdz)$ a pour expression :

$$adx + bdy + cdz = \sum \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)$$

c'est-à-dire :

$$adx + bdy + cdz = (E\lambda + F\mu)\, du + (F\lambda + G\mu)\, dv.$$

Les équations qui déterminent $\lambda$ et $\mu$ sontdonc, en vertu duthéorème rappelé :

$$\begin{cases} E\lambda + F\mu = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}, & (1) \\ F\lambda + G\mu = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}, & (2) \\ E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2 = 1. & (3) \end{cases}$$

Ces équations montrent que $\theta$ doit satisfaire à l'équation :

$$\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial\theta}{\partial u} \\ F & G & \frac{\partial\theta}{\partial v} \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial\theta}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(4)\quad H\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) = \frac{G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2} = 1.$$

A chaque solution $\theta$ de cette équation correspond une congruence de droites, définie par les équations (1) et (2), et une famille de géodésiques, définie (p. 115) par :

$$(5)\quad \begin{cases} E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} = \frac{\partial\theta}{\partial u}, \\ F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} = \frac{\partial\theta}{\partial v}. \end{cases}$$

Le problème de la recherche des lignes géodésiques est donc ramené à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (4).

Remarque I. — Soit $\theta$ une solution de l'équation (4); on peut se demander la signification géométrique des courbes définies par :

$$(6)\quad \theta(u, v) = C^{te}.$$

Soient à cet effet $\lambda'$ et $\mu'$ les paramètres directeurs (superficiels) de la tangente en un point $(u, v)$ de l'une de ces courbes, on a évidemment :

$$\frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda' + \frac{\partial\theta}{\partial v}\mu' = 0,$$

et, par suite, en tenant compte des équations (1) et (2),

$$(E\lambda + F\mu)\lambda' + (F\lambda + G\mu)\mu' = 0.$$

On voit donc (p. 114) que les courbes (6) et la famille de géodésiques, correspondant à la solution $\theta$, forment un réseau orthogonal.

La méthode que nous venons d'indiquer repose donc sur la recherche directe des *parallèles* de la surface.

REMARQUE II. — Considérons encore la solution $\theta$ et la famille de géodésiques correspondante. Les surfaces $\Sigma$, normales aux tangentes de ces géodésiques, sont définies (p. 180) par :

$$\begin{aligned} X &= x - \left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}\right)(\theta + K), \\ Y &= y - \left(\lambda \frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v}\right)(\theta + K), \\ Z &= z - \left(\lambda \frac{\partial z}{\partial u} + \mu \frac{\partial z}{\partial v}\right)(\theta + K), \end{aligned}$$

où K est une constante et où $\lambda$ et $\mu$ sont données par les équations (1) et (2).

REMARQUE III. — Supposons les lignes coordonnées rectangulaires, c'est-à-dire :

$$F = 0;$$

les équations (5) deviennent alors :

$$(7) \qquad E \frac{du}{ds} = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \qquad G \frac{dv}{ds} = \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Soit MT la tangente en un point M d'une géodésique définie par ces équations; posons :

$$\omega = \widehat{MU, MT}.$$

On a vu (p. 106) que les projections du segment $ds$ sur MU et MV sont $ds_1$ et $ds_2$; donc :

$$+ \sqrt{E} du = ds \cos \omega, \qquad + \sqrt{G} dv = ds \sin \omega.$$

Par suite, les équations (7) donnent :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} + \sqrt{E} \cos \omega &= \frac{\partial \theta}{\partial u}, \\ + \sqrt{G} \sin \omega &= \frac{\partial \theta}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

REMARQUE IV. — L'équation différentielle des lignes géodésiques correspondant à la famille de parallèles :

$$\theta(u, v) = a$$

est, si on ne précise pas la variable indépendante,

$$(9) \qquad \frac{\mathrm{E}du + \mathrm{F}dv}{\frac{\partial\theta}{\partial u}} = \frac{\mathrm{F}du + \mathrm{G}dv}{\frac{\partial\theta}{\partial v}},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{du}{-\mathrm{F}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \mathrm{G}\frac{\partial\theta}{\partial u}} = \frac{dv}{\mathrm{E}\frac{\partial\theta}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\theta}{\partial u}},$$

Posons :

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = p \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = q;$$

le système des équations (4) et (9), dont dépend la recherche des parallèles et des géodésiques, prend la forme simple :

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}(p, q) = \dfrac{\mathrm{G}p^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{E}q^2}{\Delta} = 1. \\ \dfrac{du}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}} = \dfrac{dv}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q}}. \end{cases}$$

## § 8. — *Théorème de Jacobi. Applications*

L'application de la méthode précédente peut être simplifiée au moyen du théorème suivant, qui est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général dû à Jacobi.

Théorème. — « Si la fonction $\theta(u, v, a)$ dépendant d'un paramètre « variable $(a)$ (non additif) satisfait à l'équation :

$$(1) \qquad \mathrm{H}(p, q) = 1,$$

« l'équation des lignes géodésiques de la surface est :

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = b,$$

« $b$ désignant un nouveau paramètre. »

En effet, cherchons les géodésiques qui correspondent à $\theta(u, v, a)$ pour une valeur quelconque de $a$. Il suffit, pour cela, de remplacer $\theta$ par

cette valeur dans :

$$(2)\qquad \frac{du}{\frac{\partial H}{\partial p}} = \frac{dv}{\frac{\partial H}{\partial q}},$$

et d'intégrer. Or, par hypothèse, l'équation (1) devient une identité en $u$, $v$, $a$, si l'on y remplace la fonction inconnue par $\theta$ $(u, v, a)$; donc on a, en différenciant par rapport à $a$ :

$$\frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial q}{\partial a} = 0.$$

L'équation (2) équivaut donc à :

$$\frac{\partial p}{\partial a} du + \frac{dq}{\partial a} dv = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial a} du + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v \partial a} dv = 0$$

ou, enfin,

$$(3)\qquad \frac{\partial \theta}{\partial a} = b.$$

Pour une valeur déterminée de $a$, cette équation définit les géodésiques orthogonales aux courbes :

$$\theta\ (u, v, a) = \text{const.}$$

Si l'on fait varier $a$ et $b$ dans l'équation (3), on obtient une famille de géodésiques, dépendant essentiellement de deux paramètres, c'est-à-dire la famille complète de géodésiques.

Applications. — 1° *Lignes géodésiques d'une surface de révolution.* — Nous avons vu que, par un choix convenable des coordonnées (p. 107), le ($ds^2$) d'une surface quelconque de révolution peut prendre la forme :

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2, \qquad r = \varphi\ (u).$$

L'équation aux dérivées partielles (1) devient :

$$(4)\qquad r^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 = r^2.$$

Pour obtenir une fonction $\theta$ $(u, v, a)$ dépendant d'un paramètre $a$ et

satisfaisant à l'équation (4), il suffit de résoudre le système :

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} = a, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \tag{6}$$

ce qui donne évidemment :

$$\theta = av + \int \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}\, du\,;$$

mais :

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = v - \int \frac{a du}{r\sqrt{r^2 - a^2}}\,;$$

donc l'équation :

$$\int \frac{a du}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = v + b$$

est celle des géodésiques. Nous retrouvons ainsi l'équation déjà obtenue (p. 174).

Les formules (8) du paragraphe précédent donnent ici :

$$r \sin\omega = \frac{\partial\theta}{\partial v} = a,$$

résultat également obtenu plus haut.

2° *Théorème de Liouville*. — Supposons maintenant que le $(ds^2)$ de la surface ait la forme suivante :

$$ds^2 = (\mathrm{U} - \mathrm{V})\,(du^2 + dv^2).$$

Dans ce cas, on peut, comme l'a montré Liouville, obtenir les géodésiques de la surface au moyen de quadratures.

En effet, l'équation aux dérivées partielles se réduit ici à :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{U} - \mathrm{V}.$$

On obtient une fonction $\theta$ $(u, v, a)$ satisfaisant à cette équation en résolvant le système :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{U} - a, \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = a - \mathrm{V},$$

ce qui donne :

$$\theta = \int \sqrt{U - a}du + \int \sqrt{a - V}dv;$$

l'équation des géodésiques de la surface est donc :

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = -\int \frac{du}{\sqrt{U - a}} + \int \frac{dv}{\sqrt{a - V}} = b.$$

Remarque. — Les formules (8) du paragraphe précédent donnent ici :

$$\sqrt{U - V}\cos\omega = \sqrt{U - a},$$
$$\sqrt{U - V}\sin\omega = \sqrt{a - V};$$

de là on déduit la formule suivante, également due à Liouville :

$$U\sin^2\omega + V\cos^2\omega = a.$$

Ainsi, en tous les points d'une géodésique quelconque de la surface la fonction $(U\sin^2\omega + V\cos^2\omega)$ conserve la même valeur.

# TABLE DES MATIÈRES

## PREMIÈRE PARTIE

### PROPRIÉTÉS DESCRIPTIVES DES LIGNES

#### CHAPITRE PREMIER

**Tangente. — Plan osculateur.**



#### CHAPITRE II

**Enveloppe d'une famille de courbes à un paramètre.**



## DEUXIÈME PARTIE

### PROPRIÉTÉS DESCRIPTIVES DES SURFACES COURBES

#### CHAPITRE PREMIER

**Plan tangent. — Enveloppe d'une famille de surfaces à un ou deux paramètres.**

### CHAPITRE II

**Premières notions sur les systèmes de droites, surfaces gauches. — Surfaces développables. — Congruences. — Complexes.**



---

## TROISIÈME PARTIE

### PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES LIGNES

---

### CHAPITRE PREMIER

**Formules fondamentales.**



### CHAPITRE II

**Applications des formules fondamentales. — Formules relatives à la variation d'un segment.**



---

## QUATRIÈME PARTIE

### PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES SURFACES RÉGLÉES

#### CHAPITRE PREMIER

**Surfaces gauches.**



#### CHAPITRE II

**Surfaces développables.**



## CINQUIÈME PARTIE

### PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES SURFACES COURBES

#### CHAPITRE PREMIER

**Notions préliminaires.**



#### CHAPITRE II



#### CHAPITRE III

## CHAPITRE IV



## CHAPITRE V



## CHAPITRE VI



## CHAPITRE VII

**Application des théories précédentes.**



## CHAPITRE VIII



Tours. — Imprimerie Deslis Frères.

